МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. Бекетова

Л. Б. Коваленко

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Модуль 2

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2017

УДК 51(075)
К56

Рецензенти:

Колосов А. І., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова;

Щелкунова Л. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету будівництва та архітектури

Рекомендовано до друку
Вченою радою ХНУМГ ім. О. М. Бекетова як навчальний посібник
(протокол № 8 від 27.01.2017 р.)

Коваленко Л. Б.
К56 Вища математика. Модуль 2 : навч. посібник / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 221 с.
ISBN 978-966-695-427-8

У навчальному посібнику розглянуто основні питання з п’яти розділів вищої математики. Наведено базові визначення та теореми. У кожному розділі подано приклади задач та методичні вказівки до їх розв’язання. У додатковому матеріалі в конспективній формі зібрані теоретичні відомості та розглянуті приклади застосування, що сприяє самостійній роботі студентів в позааудиторний час.

Мета посібника – допомогти студентам будівельних спеціальностей під час підготовки до занять, заліків та іспитів із курсу вищої математики.

УДК 51(075)

ISBN 978-966-695-427-8

З М І С Т

ПЕРЕДМОВА

Основою цього посібника є цикл лекцій з вищої математики, які читає автор в Харківському національному університеті міського господарства імені О. М. Бекетова для студентів освітнього рівня «бакалавр» за спеціальністю 192 – Будівництво та цивільна інженерія.

Навчальний посібник побудований за модульною технологією навчання згідно з робочими програмами курсу «Вища математика». Доступне, коректне подання теоретичного матеріалу супроводжується детальними ілюстраціями, великою кількістю прикладів.

Посібник розрахований на засвоєння матеріалу другого модуля і є логічним продовженням посібника «Вища математика. Модуль 1». Відповідно програми охоплено такі розділи вищої математики, як комплексні числа, інтегральне числення функції однієї змінної, функції декількох змінних, звичайні диференціальні рівняння.

Кожний розділ посібника супроводжується достатню кількістю прикладів. Це дає змогу студентам очної та заочної форм навчання самостійно вивчати цей курс вищої математики.

У стислій формі подано довідковий матеріал, який допоможе під час розв’язання задач.

У комплекті із цим посібником студентам пропонується «Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 2», у якому містяться завдання щодо практичного опрацювання вивченого теоретичного матеріалу.

Розділ 7 КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Один із способів побудови множини комплексних чисел полягає в тому, що множину дійсних чисел розширюють приєднанням до множини дійсних чисел нового числового об'єкта – кореня рівняння $x^2+1=0$.

Добута «розширена» множина має назву *множина комплексних чисел.*

7.1 Аксіоматична побудова множини комплексних чисел

Комплексні числа не є числами в звичайному значенні цього слова, що застосовуються під час підрахунків і вимірювань, а є математичними об'єктами, які визначаються поданими нижче властивостями.

Визначення 7.1. Число

$$z=a+ib, \qquad (7.1)$$

де a, b - будь-які дійсні числа, а i - уявна одиниця (визначається умовою $i^2=-1$) називається ***комплексним числом***; a - ***дійсною частиною*** комплексного числа ($\mathrm{Re}z=a$), b – ***уявною частиною*** комплексного числа ($\mathrm{Im}z=b$).

Визначення 7.2. Комплексні числа $z_1=a_1+ib_1$ і $z_2=a_2+ib_2$ називаються ***рівними***, якщо рівні їхні дійсні й уявні частини, тобто $a_1=a_2$, $b_1=b_2$.

Визначення 7.3. Комплексне число $z=a+ib$ дорівнює нулю, якщо його дійсна і уявна частини дорівнюють нулю ($a=b=0$).

Зауваження. Комплексне число $z=a+ib$ при $b=0$ вважається таким, що співпадає з дійсним числом a ($a+i0=a$), а при $a=0$ вважається ***суто уявним*** і позначається ib ($0+ib=ib$).

7.2 Геометричне зображення комплексного числа

Подібно до того, як дійсні числа можна зображати точками на числовій прямій, комплексні числа можна зображати точками на площині. Можливість такого зображення ґрунтується на ототожненні множини комплексних чисел $a+ib$ множині пар дійсних чисел (a,b), які в прямокутній системі координат xOy можна трактувати як координати точок площини. Абсцисами відповідних точок будуть дійсні частини, а ординатами – уявні частини комплексних чисел, тому вісь абсцис називається ***дійсною віссю***, а вісь ординат – ***уявною віссю***.

Також з кожною точкою A координатної площини xOy можна поєднати вектор $\overrightarrow{OA}$, який виходить з початку координат і закінчується у точці A, його проекціями на осі координат є дійсна та уявна частини комплексного числа відповідно.

Отже комплексні числа допускають ще одну геометричну інтерпретацію: кожне комплексне число $a+ib$ можна вважати вектором $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a,b) (рис. 7.1). Координати вектора $\overrightarrow{OA}$ при цьому будуть такими самими, як і координати точки A, а саме (a,b).

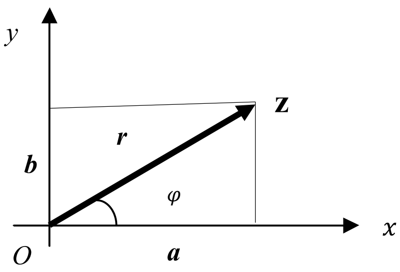
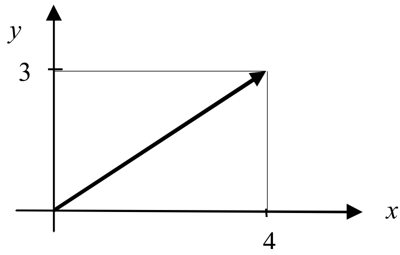


Рисунок 7.1

Приклад 7.1. Побудувати комплексне число $z = 4 + 3i$.

Розв'язання: На осі абсцис відкладаємо відрізок довжиною в 4 одиниці, на осі ординат – 3.



7.3 Операції над комплексними числами

Визначення 7.4. Сумою комплексних чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ і $z_2 = a_2 + ib_2$ називається комплексне число z, дійсна частина якого дорівнює сумі дійсних частин, а уявна частина - сумі уявних частин, тобто

$$z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i. \quad (7.2)$$

Про число z кажуть, що його отримали внаслідок додавання комплексних чисел z_1, і z_2, і записують $z = z_1 + z_2$.

Числа z_1, і z_2 називають ***доданками***.

Властивості операції додавання комплексних чисел:

1) асоціативність: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;

2) комутативність: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

Визначення 7.5. Комплексне число $-a - ib$ називається ***протилежним*** до комплексного числа $a + ib$. Комплексне число, протилежне до комплексного числа z, позначається $-z$. Сума комплексних чисел z і $-z$ дорівнює нулю: $z + (-z) = 0$.

Визначення 7.6. Різницею комплексних чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ і $z_2 = a_2 + ib_2$ називається комплексне число z, що є сумою числа z_1 і числа, протилежного до z_2:

$$z = z_1 + (-z_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i, \qquad (7.3)$$

тобто комплексним числом, дійсна і уявна частини якого дорівнюють різниці дійсних і уявних частин зменшуваного і від'ємника відповідно. Про число z кажуть, що його дістали внаслідок віднімання комплексного числа z_2 від комплексного числа z_1 і записують $z = z_1 - z_2$.

Визначення 7.7. Добутком комплексних чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ і $z_2 = a_2 + ib_2$ називається комплексне число z:

$$z = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i. \qquad (7.4)$$

Про число z кажуть, що його отримали внаслідок множення комплексного числа z_1 на комплексне число z_2, і записують так:

$$z = z_1 \cdot z_2.$$

Числа z_1 і z_2 називають ***співмножниками***.

Властивості операції множення комплексних чисел:

1) асоціативність: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$;

2) комутативність: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

Визначення 7.8. Часткою двох комплексних чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ і $z_2 = a_2 + ib_2$ називається комплексне число z, а $z_1 = z \cdot z_2$. Частку комплексних чисел обчислюють за формулою

$$z = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i. \qquad (7.5)$$

Про число z кажуть, що його отримали внаслідок ділення комплексного числа z_1 на комплексне число z_2, і записують так:

$$z = \frac{z_1}{z_2}.$$

Додавання і множення комплексних чисел зв'язані правилом, яке називається ***законом дистрибутивності*** множення відносно додавання: $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$.

Визначення 7.9. Число $\sqrt{a^2 + b^2}$ називається ***модулем*** комплексного числа $z = a + ib$. Модуль комплексного числа позначається $|z|$.

Модулі двох будь-яких комплексних чисел z_1 і z_2 (для частки вважається, що $z_2 \neq 0$) задовольняють співвідношенням:

1) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
2) $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$;
3) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
4) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$;
5) $|z^n| = |z|^n$.

Визначення 7.10. Комплексне число $a - ib$ називається ***комплексно спряженим*** з числом $z = a + ib$ і позначається $\bar{z}$. Добуток комплексного числа на спряжене йому є дійсне число, яке дорівнює квадрату модуля кожного із співмножників:

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib\,)(a - ib\,) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

Зауваження. Усі відомі в області дійсних чисел закони та властивості арифметичних дій, як бачимо, без змін переносяться в область комплексних чисел. Якщо в будь-якій арифметичній дії замість усіх комплексних чисел обрати їм спряжені, то й результат отримаємо спряжений до початкового.

Приклад 7.2. Знайти суму, різницю, добуток і частку комплексних чисел $z_1 = 2 - 3i$ і $z_2 = 12 + 5i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

Розв'язання:

$z_1 + z_2 = (2 + 12) + (-3 + 5)i = 14 + 2i$;

$|z_1 + z_2| = \sqrt{14^2 + 2^2} = \sqrt{196 + 4} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$;

$z_1 - z_2 = (2 - 12) + (-3 - 5)i = -10 - 8i$;

$|z_1 - z_2| = \sqrt{(-10)^2 + (-8)^2} = \sqrt{100 + 64} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$.

Обчислимо добуток комплексних чисел безпосередньо

$$z_1 \cdot z_2 = (2-3i)\cdot(12+5i) =$$
$$= 2\cdot 12 - 3i\cdot 12 + 2\cdot 5i - 3i\cdot 5i =$$
$$= 24 - 36i + 10i + (-1)\cdot(-15) = 39 - 26i;$$

або за формулою (7.4):

$$z_1 \cdot z_2 = (2-3i)\cdot(12+5i) =$$
$$= (2\cdot 12 - (-3)\cdot 5) + (2\cdot 5 + (-3)\cdot 12)i = 39 - 26i;$$
$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{39^2 + (-26)^2} = \sqrt{1521+676} = \sqrt{2197}.$$

Обчислимо частку комплексних чисел, помноживши чисельник та знаменник на комплексно спряжене

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{12+5i} = \frac{(2-3i)\cdot(12-5i)}{(12+5i)\cdot(12-5i)} = \frac{24-36i-10i+15i^2}{12^2-5^2i^2} = \frac{9-46i}{144+25} =$$
$$= \frac{9}{169} - \frac{46}{169}i;$$

або за формулою (7.5):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{12+5i} = \frac{2\cdot 12+(-3)\cdot 5}{12^2+(-5)^2} + \frac{12\cdot(-3)-2\cdot 5}{12^2+(-5)^2}i = \frac{9}{169} - \frac{46}{169}i;$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{9}{169}\right)^2 + \left(-\frac{46}{169}\right)^2} = \frac{\sqrt{81+2116}}{169} = \frac{\sqrt{2197}}{169}.$$

7.4 Тригонометрична і показникова форми запису комплексного числа

Крім алгебраїчної форми запису комплексного числа під час розв’язання задач застосовують також ***тригонометричну*** форму. Нехай комплексне число $z = a + ib \neq 0$ зображується вектором $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a, b) (рис. 7.1). Позначимо довжину вектора $\overrightarrow{OA}$ буквою r:

$$r = \left|\overrightarrow{OA}\right|,$$

а кут, який він утворює з додатним напрямом осі Ox - через φ

(кут φ вважається виміряним у радіанах).

Скориставшись означеннями функцій $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$:

$$\sin\varphi = \frac{b}{r}; \quad \cos\varphi = \frac{a}{r},$$

комплексне число $z = a + ib$ можна записати у такому вигляді

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad (7.6)$$

де $$r = \sqrt{a^2 + b^2}\,, \qquad (7.7)$$

а кут φ визначається з умов

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (7.8)$$

Вираз (7.6) називається ***тригонометричною формою*** запису комплексного числа. Дійсне число r є модулем комплексного числа і позначається $|z|$, а кут φ, виміряний у радіанах, його аргументом і позначається $Argz$.

Якщо комплексне число не дорівнює нулю, то модуль його додатний (7.7), а аргумент визначається формулами (7.8) з точністю до кута, кратного 2π . Якщо ж $z = 0$, тобто $a = b = 0$, то й модуль його дорівнює нулю, а аргумент нульового комплексного числа не визначено. Отже, модуль будь-якого комплексного числа визначено однозначно!

Зазвичай, для того, щоб уникнути неоднозначності, яка виникає під час обчислення аргументу комплексного числа, використовують поняття ***головного значення*** аргументу комплексного числа (позначення $argz$), вважаючи, що $argz \in (-\pi;\pi]$. Аргумент комплексного числа відповідає співвідношенню: $Argz = argz + 2\pi k,\ k\epsilon Z$ (Z – множина цілих чисел).

Нехай z_1 і z_2 - два комплексних числа, що відмінні від нуля, записано в тригонометричній формі:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\,, \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Визначення 7.11. Добутком двох комплексних чисел z_1 і z_2 є комплексне число, модуль якого дорівнює добутку модулів співмножників, а аргумент - сумі аргументів співмножників:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \qquad (7.9)$$

Вектор, що зображує добуток комплексних чисел z_1 і z_2, отримуємо внаслідок повороту вектора $\vec{z}$ проти годинникової стрілки на кут, що дорівнює φ_2, і розтягу його в $|z_2|$ разів (у випадку $|z_2| > 1$ - див. рис. 7.2).

Визначення 7.12. Часткою двох комплексних чисел z_1 і z_2, що не дорівнюють нулю, є комплексне число, модуль якого дорівнює частці модулів діленого й дільника, а аргумент – різниці аргументів діленого й дільника:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \qquad (7.10)$$

Вектор, що зображує частку двох комплексних чисел z_1 і z_2, отримуємо внаслідок повороту вектора, який зображує комплексне число z_1, за годинниковою стрілкою на кут, що дорівнює φ_2, і стиску його в $|z_2|$ разів (для випадку $|z_2| > 1$ - див. рис. 7.3).

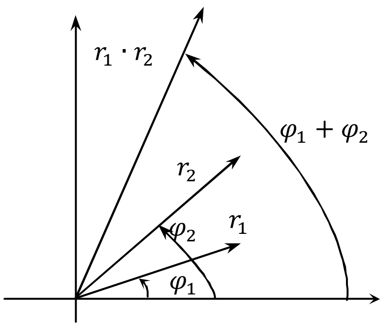


Рисунок 7.2

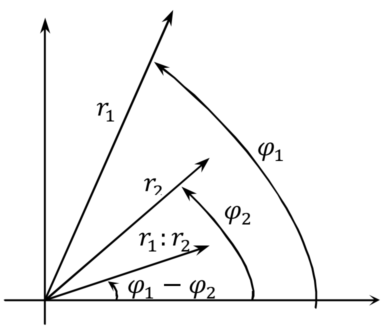


Рисунок 7.3

Визначення 7.13. Показниковою функцією з уявним показником степені називається комплексна функція

$$e^{it} = \cos t + i \sin t, \qquad (7.11)$$

де параметр t може набувати будь-яких дійсних значень. Формула (7.11) називається ***формулою Ейлера***.

Формула Ейлера дає змогу записувати комплексні числа в ***показниковій формі***. Якщо $|z| = r$ і $Argz = \varphi$, то комплексне число в показниковій формі набуває такого вигляду:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}. \qquad (7.12)$$

Аналогічно до визначень 7.11, 7.12 вводиться добуток та частка комплексних чисел z_1 і z_2, записаних у показниковій формі:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}; \qquad (7.13)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \qquad (7.14)$$

Зауваження. Формули Ейлера дають змогу виразити тригонометричні функції через показникові функції комплексного аргументу:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}; \qquad (7.15)$$

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}. \qquad (7.16)$$

Приклад 7.3. Знайти модуль та аргумент комплексного числа $z = \sqrt{3} - i$. Записати його в тригонометричній та показниковій формі.

Розв'язання:

$$r = |z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2;$$

$$Argz = \varphi = \text{arctg}\frac{b}{a} = \text{arctg}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6};$$

або $Argz = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.

Отже, за формулою (7.6) комплексне число z в тригонометричній формі має такий вигляд:

$$z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right);$$

а за формулою (7.12) показникова форма числа z має вигляд:

$$z = \sqrt{3} \cdot e^{\frac{11\pi}{6}i}.$$

7.5. Натуральний степінь та корінь комплексного числа

Визначення 7.14. Натуральним n*-м *степенем комплексного числа z називається комплексне число w, отримане внаслідок множення числа z самого на себе n раз: $w = zz \cdot \ldots \cdot z$.

Зазвичай використовують коротший запис: $w = z^n$, у якому число z є ***основою степеня,*** а натуральне число n – ***показником степеня***.

n-й степінь комплексного числа z, заданого в тригонометричній формі обчислюється за ***формулою Муавра:***

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{i\varphi n}. \qquad (7.17)$$

Визначення 7.15. Коренем n-го степеня з комплексного числа z називається таке комплексне число w, n-й степінь якого дорівнює z:

$$w^n = z.$$

Корінь n-го степеня з комплексного числа z позначається символом $\sqrt[n]{z}$. На відміну від кореня з дійсного числа, корінь n-го степеня з комплексного числа визначається неоднозначно. Саме в множині комплексних чисел існує рівно n коренів n-го степеня з даного комплексного числа.

Усі корені n-го степеня з комплексного числа z, заданого в тригонометричній формі, обчислюються за формулою

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right), \qquad (7.18)$$

де $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Геометрично всі корені n-го степеня з комплексного числа зображуються точками, що лежать на колі з центром у початку координат, радіус якого дорівнює $\sqrt[n]{r}$, а центральні кути між радіусами, проведеними у сусідні точки, дорівнюють $\frac{2\pi}{n}$.

Приклад 7.4. Обчислити $(1+i)^8$.

Розв'язання. Подамо комплексне число в тригонометричній або показниковій формі:

$r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2};$

$Argz = \varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}.$

За формулами (7.6) і (7.12) комплексне число запишемо так

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}.$$

Обчислимо восьмий степінь заданого комплексного числа за формулою Муара (7.17):

$$(1+i)^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8\left(\cos\left(\frac{8\cdot\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{8\cdot\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 16(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 16e^{2\pi i} = 16.$$

Приклад 7.5. Знайти корені рівняння $z^4 + 1 = 0$.

Розв'язання: $z^4 = -1$ або $z = \sqrt[4]{-1}$. Подамо число -1 в тригонометричній формі. Для цього обчислимо модуль та аргумент числа -1:

$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1;$

$Argz = \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{0}{-1}\right) = \operatorname{arctg} 0 = \pi.$

Отже,

$-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Скористаємося формулою (7.18):

$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right)$, де $k = 0,1,2,3$.

Підставляючи послідовно значення k в отриманий вираз, знайдемо всі чотири корені рівняння:

$z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$;
$z_2 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$;
$z_3 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$;
$z_4 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

Геометрично отримані корені можна зобразити так (рис. 7.4):

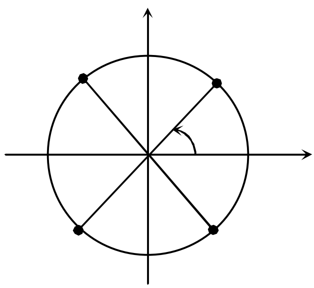


Рисунок 7.4

Аналогічно у множині комплексних чисел можна обчислити корінь n-го степеня з будь-якого дійсного числа. При цьому хоча б один корінь з додатного дійсного числа буде дійсним.

Контрольні питання

1. Дайте визначення комплексного числа.

2. Запишіть алгебраїчну, тригонометричну та показникову форму запису комплексного числа. Наведіть приклади.

3. Як обчислити модуль та аргумент комплексного числа?

4. Дайте визначення комплексно спряженого числа. Порівняйте модулі комплексного числа та комплексно спряженого до нього.

5. Як обчислюються сума, різниця, добуток та частка комплексних чисел? Якими властивостями характеризуються операції з комплексними числами? Чи відрізняються ці властивості від аналогічних із дійсними числами?

6. Як обчислити натуральний степінь комплексного числа? Проілюструйте прикладами.

7. Як обчислити корінь n-го степеня з комплексного числа? Проілюструйте прикладами.

Розділ 8 ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

8.1 Первісна

У попередніх розділах, коли вивчали диференціювання, розв'язували наступну задачу: як знайти похідну цієї функції? Зараз поставимо перед собою обернену задачу: як знайти функцію, якщо відома її похідна?

Визначення 8.1. Первісною від функції $f(x)$ називається функція $F(x)$, похідна від якої дорівнює даній функції:

$$F'(x) = f(x). \quad (8.1)$$

Приклад 8.1. Знайти первісну функції $f(x) = x^3$.

Розв'язання: За визначенням 8.1 функція $\frac{1}{4}x^4$ є первісною, оскільки $\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = x^3$. Але й $\frac{1}{4}x^4 - 17$ і $\frac{1}{4}x^4 + 5$ теж є первісними, тому що $\left(\frac{1}{4}x^4 - 17\right)' = x^3$; $\left(\frac{1}{4}x^4 + 5\right)' = x^3$.

Теорема 8.1. Будь-яка неперервна функція має незчисленну множину первісних, до того ж будь-які дві з них відрізняються на сталу величину.

Доведення:

Нехай $F_1(x)$ і $F_2(x)$- дві первісні функції $f(x)$. За визначенням первісної маємо:

$$F_1'(x) = f(x) \quad \text{і} \quad F_2'(x) = f(x).$$

Позначимо $F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x)$.

Обчислимо похідну від обох частин:

$$F_1'(x) - F_2'(x) = \varphi'(x) \quad \text{або} \quad f(x) - f(x) = \varphi'(x),$$

$$\text{або} \quad \varphi'(x) = 0.$$

З останньої тотожності випливає, що $\varphi(x) = C$- стала величина.

Визначення 8.2. Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то вираз $F(x)+C$ називається ***невизначеним інтегралом*** від функції $f(x)$ і позначається як $\int f(x)dx$. Функцію $f(x)$ називають ***підінтегральною функцію***, вираз $f(x)dx$ - ***підінтегральним виразом***, знак $\int$ – ***знаком інтегралу***.

Визначення 8.3. Знаходження всіх первісних функції називається ***невизначеним інтегруванням*** (далі просто ***інтегруванням***) цієї функції.

За визначенням 8.1, ***головні властивості невизначного інтегралу будуть такими***:

- $(\int f(x)dx)' = f(x)$;
- $d\int f(x)dx = f(x)dx$;
- $\int f'(x)dx = f(x) + C$;
- $\int df(x) = f(x) + C$.

8.2 Таблиця невизначених інтегралів

Найпростіші прийоми інтегрування

В таблиці 8.1 зведено формули, необхідні для інтегрування. Ці формули випливають з формул диференціювання базових елементарних функцій. Будь-яка з наведених формул легко перевіряється шляхом диференціювання.

Зауваження. У таблиці 8.1 буква u може позначати як незалежну змінну x, так і неперервну диференційовану функцію $u = u(x)$ аргументу x. Справедливість цього зауваження ми доведемо пізніше.

Таблиця 8.1– Базова таблиця інтегралів

1	$\int du = u + C$
2	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C(n \neq -1)$
3	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$
4	$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$
5	$\int a^u du = \frac{a^u}{lna} + C$
6	$\int e^u du = e^u + C$
7	$\int \frac{du}{u} = ln\|u\| + C$
8	$\int cosu = sinu + C$
9	$\int sinu = -cosu + C$
10	$\int \frac{du}{cos^2 u} = tgu + C$
11	$\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctgu + C$
12	$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$
13	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln \left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + C$
14	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = ln \left\|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\| + C$
15	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsin \frac{u}{a} + C$

Теорема 8.2. Інтеграл від алгебраїчної суми кінцевого числа функцій дорівнює сумі інтегралів:

$$\int (u+v)dx = \int udx + \int vdx. \tag{8.2}$$

Доведення. Нехай функція $f(x)$ подана у вигляді двох доданків, кожен із яких є функцією незалежної змінної: $f(x) = u + v$.

Похідна від лівої частини рівності (8.2) за визначенням похідної дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int (u+v)dx\right)' = u + v.$$

Диференціюємо праву частину рівності (8.2) і отримаємо

$$\left(\int udx + \int vdx\right)' = \left(\int udx\right)' + \left(\int vdx\right)' = u + v.$$

Ми отримали той самий вираз. Теорему доведено.

Теорема 8.3. Константу можна виносити за знак інтегралу:

$$\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx. \tag{8.3}$$

Доведення. Диференціюємо обидві частини рівності (8.3):

$$\left(\int Cf(x)dx\right)' = Cf(x); \quad \left(C\int f(x)dx\right)' = C\left(\int f(x)dx\right)' = Cf(x).$$

що й потрібно було довести.

Теорема 8.4 (про інваріантність формул інтегрування). Будь-яка формула інтегрування зберігає свій вигляд, якщо замінити незалежну змінну будь-якою диференційованою функцією від незалежної змінної, тобто якщо

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad \text{то} \qquad \int f(u)du = F(u) + C.$$

Доведення. З рівності $\int f(x)dx = F(x) + C$ за визначенням первісної випливає $F'(x) = f(x)$.

Розглянемо функцію $F(u) = F[u(x)]$. Її диференціал буде таким

$$dF(u) = F'(u)du = f(u)du.$$

Звідси

$$\int f(u)du = \int dF(u) = F(u) + C$$

що й потрібно було довести.

Цією теоремою ми довели зауваження до таблиці невизначних інтегралів. Це правило є дуже важливим, оскільки значно розширює таблицю інтегралів. Виявляється, що таблиця є справедливою незалежно від того, чи є змінна інтегрування незалежною змінною, чи будь-якою диференційованою функцією від неї.

Теорема 8.5. Якщо функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$, то справедливі формули:

а) $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C;$ (8.4)

б) $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C;$ (8.5)

в) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$ (8.6)

Доведення. Останні рівності доведемо за допомогою диференціювання, беручи до уваги вже доведені теореми:

а) $\left(\int f(ax)dx\right)' = \left(\int f(ax)d\left(\frac{a}{a}x\right)\right)' = \left(\frac{1}{a}\int f(ax)d(ax)\right)' =$

$= [u = ax] = \frac{1}{a}\left(\int f(u)du\right)' = \frac{1}{a}F(u) + C = \frac{1}{a}F(ax) + C;$

б) $\left(\int f(x+b)dx\right)' = \left(\int f(x+b)d(x+b)\right)' = [u = x+b] =$

$= \left(\int f(u)du\right)' = F(u) + C = F(x+b) + C;$

в) $\left(\int f(ax+b)dx\right)' = \left(\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)\right)' =$

$= [u = ax+b] = \frac{1}{a}\left(\int f(u)du\right)' = \frac{1}{a}F(u) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$

Теорему доведено.

Проілюструємо застосування наведених теорем при безпосередньому інтегруванні.

Приклад 8.2. Знайти невизначений інтеграл

$$\int (3x^5 + 8)(6x - 7x^3)dx.$$

Розв'язання:

$$\int (3x^5 + 8)(6x - 7x^3)dx = \int (18x^6 + 48x - 21x^8 - 56x^3)dx =$$
$$= 18\int x^6\,dx + 48\int xdx - 21\int x^8\,dx - 56\int x^3\,dx =$$
$$= \frac{18}{7}x^7 + 24x^2 - \frac{7}{3}x^9 - 14x^4 + C.$$

Приклад 8.3. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \left(2e^x + 7x^5 - \frac{6}{sin^2x} + \frac{13}{x}\right)dx.$$

Розв'язання:

$$\int \left(2e^x + 7x^5 - \frac{6}{sin^2x} - \frac{13}{x}\right)dx = 2\int e^x dx + 7\int x^5 dx -$$
$$-6\int \frac{dx}{sin^2x} - 13\int \frac{dx}{x} = 2e^x + \frac{7}{6}x^6 + 7ctgx - 13lnx + C.$$

Приклад 8.4. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{2x\sqrt{x}}dx.$

Розв'язання:

$$\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{2x\sqrt{x}}dx = \int \frac{1+3\sqrt{x}+3x+x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x}} +$$
$$+\frac{1}{2}\int dx = -\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2}lnx + 3\sqrt{x} + \frac{1}{2}x + C.$$

Приклад 8.5. Знайти невизначений інтеграл $\int tg^2x\,dx.$

Розв'язання:

$$\int tg^2x\,dx = \int \frac{sin^2x}{cos^2x}dx = \int \frac{1-cos^2x}{cos^2x}dx = \int \frac{dx}{cos^2x} - \int dx =$$
$$= tgx - x + C.$$

8.3 Метод заміни змінної

Розглянемо найпоширеніший метод інтегрування – ***метод заміни змінної***. Диференціювати елементарні функції за допомогою таблиці інтегралів не складно. Щоб ефективно використати результати теореми 8.5 необхідні навички, остільки потрібно швидко звести інтеграл до табличного. Але й теорема 8.5 не передбачає усі можливі ситуації. Спробуємо навчитися визначати підстановку (у кожному окремому випадку), за допомогою якої інтеграл можна звести до табличного. Допоможе нам в цьому наступна теорема.

Теорема 8.6. Якщо функція $f(x)$ має первісну $F(x)$

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

а функція $x = \varphi(t)$, то функція $f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$ має первісну $F\big(\varphi(t)\big)$ і

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = \int f(x)dx\big|_{x=\varphi(t)}. \qquad (8.7)$$

Доведення. За визначенням похідної,$F'(x) = f(x)$.

За правилом диференціювання складної функції,

$$\frac{d}{dt}F\big(\varphi(t)\big) = \frac{dF}{dx}\bigg|_{x=\varphi(t)} \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t).$$

Із цього випливає, що функція $f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$ має первісну $F\big(\varphi(t)\big)$. Звідси, за визначенням інтеграла

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = F\big(\varphi(t)\big) + C = F(x) + C.$$

Теорему доведено.

Приклад 8.6. Знайти невизначений інтеграл

$$\int sin(4x - 3)dx.$$

Розв'язання. $\int sin(4x-3)dx = \begin{bmatrix} u = 4x - 3 \\ du = 4dx \\ dx = \frac{1}{4}du \end{bmatrix} =$

$$=\frac{1}{4}\int sinudu=-\frac{1}{4}cosu+C=-\frac{1}{4}cos(4x-3)+C.$$

Зауважимо, що розв'язати цю задачу можна і за формулою (8.6).

Приклад 8.7. Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{dx}{7x^2+4}$.

Розв'язання. $\int\frac{dx}{7x^2+4}=\begin{bmatrix}u^2=7x^2\\ u=\sqrt{7}x\\ du=\sqrt{7}dx\\ dx=\frac{1}{\sqrt{7}}du\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{7}}\int\frac{du}{u^2+4}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{u}{2}+C=\frac{1}{2\sqrt{7}}arctg\frac{\sqrt{7}x}{2}+C.$$

Приклад 8.8. Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{xdx}{\sqrt{8-3x^2}}$.

Розв'язання. $\int\frac{xdx}{\sqrt{8-3x^2}}=\begin{bmatrix}u=8-3x^2\\ du=-6xdx\\ xdx=-\frac{1}{6}du\end{bmatrix}=-\frac{1}{6}\int\frac{du}{\sqrt{u}}=$

$$=-\frac{1}{6}\cdot 2\sqrt{u}+C=-\frac{1}{3}\sqrt{8-3x^2}+C.$$

Приклад 8.9. Знайти невизначений інтеграл

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}arccos^4 5x}.$$

Розв'язання. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}arccos^4 5x}=\begin{bmatrix}u=arccos5x\\ du=-\frac{5dx}{\sqrt{1-25x^2}}\\ \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}=-\frac{1}{5}du\end{bmatrix}=$

$$=-\frac{1}{5}\int\frac{du}{u^4}=-\frac{1}{5}\cdot\frac{u^{-3}}{(-3)}+C=\frac{1}{15arccos^3 5x}+C.$$

Приклад 8.10. Знайти невизначений інтеграл

$$\int\frac{dx}{4x-7xlnx}.$$

Розв'язання. Спочатку спростимо цей вираз, винесемо за дужки x і скористаємося методом заміни змінної:

$$\int \frac{dx}{4x-7xlnx} = \int \frac{dx}{x(4-7lnx)} = \begin{bmatrix} u = 4 - 7lnx \\ du = -7\frac{dx}{x} \\ \frac{dx}{x} = -\frac{1}{7}du \end{bmatrix} = -\frac{1}{7}\int \frac{du}{u} =$$

$$= -\frac{1}{7}lnu + C == -\frac{1}{7}ln(4-7lnx) + C.$$

8.4 Інтегрування функцій, які містять квадратний тричлен

8.4.1 Інтеграли, які мають вигляд $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ або $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Під час інтегрування запропонованих функцій за допомогою формул (12-15) таблиці 8.1 завжди є доданок, який містить першу степінь незалежної змінної. Зрозуміло: для того щоб скористатися базовою таблицею інтегралів, нам необхідно виділити повний квадрат:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2,$$

де $k^2 = c - \frac{b^2}{4a}$.

Знак плюс або мінус обирають залежно від того, яким буде другий доданок додатним чи від'ємним. Замінимо змінну $t = \sqrt{|a|}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$. За формулою (8.7) отримаємо

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\int \frac{dt}{\pm t^2 \pm k^2} \quad \text{або} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\int \frac{dt}{\sqrt{\pm t^2 \pm k^2}}.$$

Зауважимо, що перед t^2 буде знак плюс, якщо $a > 0$, і знак мінус, якщо $a < 0$. Отримані інтеграли є табличними (формули (12-15) таблиці 8.1). Після інтегрування повертаємося до початкової змінної.

Не для всіх читачів процедура виділення повного квадрату є простою, а запам'ятовувати отриману формулу не варто. Під час розв'язання наступних прикладів, буде наведено простіший прийом виділення повного квадрата. Щоб скористатися ним, потрібно тільки згадати добре відомі формули «квадрат суми» або «квадрат різниці»:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2.$$

Приклад 8.11. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{x^2-6x+15}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у виразі, який розміщено в знаменнику підінтегральної функції. Для цього підпишемо під квадратним тричленом (доданок під доданком) формулу «квадрат різниці» (обираємо формулу за знаком доданка з першим степенем незалежної змінної). Приведемо у відповідність перші два доданки, звідки знайдемо a і b. Додамо та віднімемо в початковому виразі величину, яка дорівнює b^2 (згідно з формулою). Отже,

$$x^2 - 6x + 15 = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 15 = (x-3)^2 + 6;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2;$$

$$\begin{bmatrix} a^2 = x^2 & 2ab = 6x \\ a = x & 2xb = 6x \\ & b = 3 \end{bmatrix}.$$

Підставимо отриманий вираз в початковий інтеграл і скористаємося методом заміни змінної:

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+15} = \int \frac{dx}{(x-3)^2+6} = \begin{bmatrix} u = x-3 \\ du = dx \end{bmatrix} = \int \frac{du}{u^2+6} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} arctg \frac{u}{\sqrt{6}} + C = \frac{1}{\sqrt{6}} arctg \frac{x-3}{\sqrt{6}} + C.$$

Приклад 8.12. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x-x^2}}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у виразі, який розміщено під коренем, у знаменнику підінтегральної функції. Для цього потрібно зробити деякі перетворення, а саме:

- переписати доданки в порядку спадання степеня незалежної змінної;

- винести за дужки знак мінус;
- виділити повний квадрат у виразі, отриманому в дужках, за допомогою формули «квадрат суми»;
- змінити знак кожного доданка отриманого виразу на протилежний.

Отже,

$3-4x-x^2=-(x^2+4x-3)=7-(x+2)^2.$

Підставимо отриманий вираз в початковий інтеграл і скористаємося методом заміни змінної:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3-4x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{7-(x+2)^2}}=\begin{bmatrix}u=x+2\\du=dx\end{bmatrix}=\int\frac{du}{\sqrt{7-u^2}}=$$

$$=arcsin\frac{u}{\sqrt{7}}+C=arcsin\frac{x+2}{\sqrt{7}}+C.$$

8.4.2 Інтеграли, які мають вигляд $\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ або $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Розглянемо більш загальні інтеграли. Заважимо, що в чисельнику розміщено многочлен першого порядку, а в знаменнику (або в підкореневому виразі знаменника) – многочлен другого порядку. За правилами диференціювання, похідна від многочлена другого порядку – многочлен першого порядку. Тобто за структурою чисельник підінтегрального виразу повторює диференціал знаменника (або підкореневого виразу знаменника), ці вирази можуть тільки відрізнятися коефіцієнтами.

Приведемо методику інтегрування таких інтегралів на прикладі інтеграла $\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$. Знайдемо диференціал знаменника:

$$d(ax^2+bx+c)=(2ax+b)dx.$$

Сформуємо в чисельнику диференціал знаменника. Для цього виконаємо тотожні перетворення чисельника:

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = A\int \frac{x+\frac{B}{A}}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+\frac{2aB}{A}}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b-b+\frac{2aB}{A}}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)+\left(\frac{2aB}{A}-b\right)}{ax^2+bx+c}dx.$$

Отриманий інтеграл подамо у вигляді двох інтегралів:

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx + \frac{A\left(\frac{2aB}{A}-b\right)}{2a}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

перший з яких методом заміни змінної зведемо до інтеграла $\int \frac{du}{u}$ (формула 7 таблиці 8.1), а другий – до вже розглянутого вище інтеграла $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$.

Зауважимо, що інтеграли $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ знаходять аналогічно. Різниця полягає лише у виборі формул інтегрування. Перший з отриманих інтегралів методом заміни змінної зводиться до інтеграла вигляду $\int \frac{du}{\sqrt{u}}$ (формула 3 таблиці 8.1), а другий – до вже розглянутого вище інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Приклад 8.13. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{x-4}{x^2+10x-3}dx.$$

Розв'язання. Оцінимо диференціал знаменника

$$d(x^2+10x-3) = (2x+10)dx.$$

Сформуємо в чисельнику диференціал знаменника. Для цього виконаємо у ньому тотожні перетворення:

$$\int \frac{x-4}{x^2+10x-3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-8}{x^2+10x-3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+10-10-8}{x^2+10x-3}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+10}{x^2+10x-3}dx - \frac{18}{2}\int \frac{dx}{x^2+10x-3} = I_1 + I_2.$$

Знайдемо отримані інтеграли:

$$I_1=\frac{1}{2}\int\frac{2x+10}{x^2+10x-3}dx=\begin{bmatrix}u=x^2+10x-3\\du=(2x+10)dx\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=$$

$$=\frac{1}{2}lnu+C=\frac{1}{2}ln|x^2+10x-3|+C;$$

$$I_2=-9\int\frac{dx}{x^2+10x-3}=-9\int\frac{dx}{(x+5)^2-28}=\begin{bmatrix}u=x+5\\du=dx\end{bmatrix}=$$

$$=-9\int\frac{du}{u^2-28}=-\,9\cdot\frac{1}{2\cdot2\sqrt{7}}ln\left|\frac{u-2\sqrt{7}}{u+2\sqrt{7}}\right|+C=-\frac{9}{4\sqrt{7}}ln\left|\frac{x+5-2\sqrt{7}}{x+5+2\sqrt{7}}\right|+C.$$

Остаточно маємо:

$$\int\frac{x-4}{x^2+10x-3}dx=\frac{1}{2}ln|x^2+10x-3|-\frac{9}{4\sqrt{7}}ln\left|\frac{x+5-2\sqrt{7}}{x+5+2\sqrt{7}}\right|+C.$$

8.4.3 Інтеграли, які мають вигляд $\int\frac{dx}{(x-d)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Запропонований тип інтегралів відрізняється від розглянутого у п. 8.4.1 множником $(x-d)$ у знаменнику. Доведемо, що інтеграл вигляду $\int\frac{dx}{(x-d)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ зводиться до інтеграла вигляду $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ за допомогою ***підстановки***

$$x-d=\frac{1}{u} \tag{8.8}$$

Отже за формулою (8.8) маємо $x=\frac{1}{u}+d$, звідси $dx=-\frac{1}{u^2}du$, а

$$ax^2+bx+c=a\left(\frac{1}{u}+d\right)^2+b\left(\frac{1}{u}+d\right)+c=$$

$$=\frac{a}{u^2}+\frac{2ad}{u}+ad^2+\frac{b}{u}+bd+c=$$

$$=\frac{a+2adu+ad^2u^2+bu+bdu^2+cu^2}{u^2}=$$

$$=\frac{(ad^2+bd+c)u^2+(2ad+b)+a}{u^2}.$$

Підставимо в інтеграл:

$$\int \frac{dx}{(x-d)\sqrt{ax^2+bx+c}} = \left[x-d=\frac{1}{u}\right] = \int \frac{-\frac{1}{u^2}du}{\frac{1}{u}\cdot\frac{\sqrt{(ad^2+bd+c)u^2+(2ad+b)+a}}{u}} =$$

$$= -\int \frac{du}{\sqrt{(ad^2+bd+c)u^2+(2ad+b)+a}}.$$

Отже, інтеграл набув бажаного вигляду. Запам'ятовувати цю громіздку формулу не варто, краще під час розв'язання задач кожен раз повторювати наведену процедуру.

Приклад 8.14. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x^2-2x-1}}.$$

Розв'язання. Скористаємося підстановкою $(x+3)=\frac{1}{u}$.

$$\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x^2-2x-1}} = \begin{bmatrix} x+3=\frac{1}{u} \\ x=\frac{1}{u}-3 \\ dx=-\frac{1}{u^2}du \end{bmatrix} = \int \frac{-\frac{1}{u^2}du}{\frac{1}{u}\sqrt{\left(\frac{1}{u}-3\right)^2-2\left(\frac{1}{u}-3\right)-1}} =$$

$$= \int \frac{-\frac{1}{u^2}du}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1-6u+9u^2-2u+6u^2-u^2}{u^2}}} = \int \frac{-\frac{1}{u^2}du}{\frac{\sqrt{14u^2-8u+1}}{u^2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{14u^2-8u+1}}.$$

Далі, як і в прикладі 8.12, виділимо в підкореневому виразі повний квадрат:

$$14u^2-8u+1 =$$

$$= \left(\sqrt{14}u\right)^2 - 2\sqrt{14}u\cdot\frac{4}{\sqrt{14}} + \left(\frac{4}{\sqrt{14}}\right)^2 + 1 - \left(\frac{4}{\sqrt{14}}\right)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{14}u - \sqrt{\frac{8}{7}}\right)^2 - \frac{1}{7}.$$

Остаточно отримаємо:

$$-\int \frac{du}{\sqrt{14u^2-8u+1}} = -\int \frac{du}{\sqrt{\left(\sqrt{14}u-\sqrt{\frac{8}{7}}\right)^2-\frac{1}{7}}} =$$

за допомогою формули 14 таблиці 8.1

$$= -\frac{1}{\sqrt{14}}\ln\left|\sqrt{14}u - \sqrt{\frac{8}{7}} + \sqrt{\left(\sqrt{14}u - \sqrt{\frac{8}{7}}\right)^2 - \frac{1}{7}}\right| + C =$$

або

$$= -\frac{1}{\sqrt{14}}\ln\left|\sqrt{14}u - \sqrt{\frac{8}{7}} + \sqrt{14u^2 - 8u + 1}\right| + C, \text{ де } x + 3 = \frac{1}{u}.$$

Спробуємо підставити $u = \frac{1}{x+3}$:

$$= -\frac{1}{\sqrt{14}}\ln\left|\frac{\sqrt{14}}{x+3} - \sqrt{\frac{8}{7}} + \sqrt{\frac{14}{(x+3)^2} - \frac{8}{x+3} + 1}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{14}}\ln\left|\frac{\sqrt{14}}{x+3} - \sqrt{\frac{8}{7}} + \sqrt{\frac{14-8x-24+x^2+6x+9}{(x+3)^2}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{14}}\ln\left|\frac{\sqrt{14}}{x+3} - \sqrt{\frac{8}{7}} + \frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{x+3}\right| + C = \text{ або}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{14}}\ln\left|\frac{\sqrt{14}+\sqrt{x^2-2x-1}}{x+3} - \sqrt{\frac{8}{7}}\right| + C.$$

8.5 Інтегрування раціональних дробів

Розглянемо методику інтегрування одного з найважливіших класів елементарних функцій – ***раціональних функцій***.

Будь-яку елементарну функцію$R(x)$ можна подати у вигляді дробу $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, де $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ - многочлени:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}.$$

Нагадаємо: якщо максимальний степінь чисельника менший за максимальний степінь знаменника $(m < n)$, то дріб називається ***правильним***, якщо максимальний степінь чисельника більший або дорівнює максимальному степеню знаменника $(m \geq n)$, дріб називається ***неправильним***. Якщо $m \geq n$, то після виконання операції ділення многочленів будь-який неправильний дріб можна подати у вигляді суми многочлена (ціла частина) і правильного дробу (отриманий многочлен – результат ділення; чисельник отриманого правильного дробу – залишок від ділення):

$$R(x) = N(x) + \frac{P_{n-1}(x)}{Q_n(x)}.$$

Нагадаємо читачеві процедуру ділення многочленів.

Приклад 8.15. Знайти цілу частину і залишок алгебраїчного дробу $\frac{x^4+3x^3+2x^2+x+1}{x^2+x+1}$.

Розв'язання. Поділимо чисельник на знаменник

$$\begin{array}{rl}
-\,x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1 & \big|\,\underline{x^2+x+1} \\
\underline{x^4 + \ x^3 \ + x^2} \qquad\quad & \big|\, x^2+2x-1 \\
-\,2x^3 + x^2 + x \qquad & \\
\underline{2x^3 + 2x^2 + 2x} \qquad & \\
-\,-x^2 - x + 1 & \\
\underline{-x^2 - x - 1} & \\
-2. &
\end{array}$$

Отже, $N(x) = x^2 + 2x - 1$ - ціла частина, число (-2) – залишок.

Остаточно маємо: $\frac{x^4+3x^3+2x^2+x+1}{x^2+x+1} = x^2 + 2x - 1 - \frac{2}{x^2+x+1}$.

Інтегрувати многочлен $N(x)$ нескладно, проблематично інтегрувати правильний раціональний дріб.

Без доведення наведемо наступну теорему.

Теорема 8.7. Нехай $\frac{P(x)}{Q(x)}$- правильний раціональний дріб, де $P(x)$ і $Q(x)$ - многочлени з дійсними коефіцієнтами. Якщо

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} \dots (x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1} \dots$$
$$\cdot \dots (x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s} \qquad (8.9)$$

де a_i – дійсні корені многочлена $Q(x)$ (які попарно відрізняються) кратності α_i, $i = 1,2,\dots,r$; $x^2+p_jx+q_j = \left(x-z_j\right)\left(x-\overline{z_j}\right)$ – комплексно спряжені корені многочлена $Q(x)$

(які попарно відрізняються) кратності β_j, $j = 1,2, \dots, s$, то існують дійсні числа $A_i^{(\alpha)}$, $i = 1,2, \dots, r$, $\alpha = 1,2, \dots, \alpha_i$; $B_j^{(\beta)}$, $C_j^{(\beta)} j = 1,2, \dots, s$, $\beta = 1,2, \dots, \beta_j$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{\alpha_1 - 1}} + \dots + \frac{A_1^{(\alpha_1)}}{(x-a_1)} + \dots +$$

$$+ \frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)^{\alpha_1}} + \frac{A_r^{(2)}}{(x-a_r)^{\alpha_r - 1}} + \dots + \frac{A_r^{(\alpha_r)}}{(x-a_1)} + \dots +$$

$$+ \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}} + \frac{B_1^{(2)}x + C_1^{(2)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1 - 1}} + \dots + \frac{B_1^{(\beta_1)}x + C_1^{(\beta_1)}}{(x^2+p_1x+q_1)} + \dots +$$

$$+ \frac{B_s^{(1)}x + C_s^{(1)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}} + \frac{B_s^{(2)}x + C_s^{(2)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s - 1}} + \dots + \frac{B_s^{(\beta_s)}x + C_s^{(\beta_s)}}{(x^2+p_sx+q_s)}. \qquad (8.10)$$

Тобто будь-який правильний раціональний дріб можна розкласти на суму елементарних дробів.

Запам'ятати цю схему в загальному вигляді складно, тому розглянемо окремі ситуації, які можуть використовуватися в межах курсу, що вивчається.

8.5.1 Інтегрування раціональних дробів, корені знаменника яких дійсні та різні

Нехай дано правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменник якого має різні дійсні корені:

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n). \qquad (8.11)$$

Тоді раціональний дріб можна розкласти на найпростіші дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a_1} + \frac{B}{x-a_2} + \dots + \frac{C}{x-a_n}. \qquad (8.12)$$

Інтеграл від такого дробу зводиться до

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = A \int \frac{dx}{x-a_1} + B \int \frac{dx}{x-a_2} + \dots + C \int \frac{dx}{x-a_n} =$$

$$= A\,ln|x-a_1| + B\,ln|x-a_2| + \cdots + C\,ln|x-a_n|.$$

Приклад 8.16. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx.$$

Розв'язання. Раціональний дріб неправильний. Виділимо цілу частину:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3+0x^2+0x+1 & \underline{x^3-5x^2+6x} \\ \underline{x^3-5x^2+6x\phantom{{}+1}} & 1 \\ 5x^2-6x+1. & \end{array}$$

Отже, початковий інтеграл набуде такого вигляду

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx = \int\left(1+\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}\right)dx = \int dx + \int \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}dx.$$

Знайдемо корені знаменника:

$$x^3-5x^2+6x = x(x^2-5x+6) = x(x-2)(x-3).$$

Зрозуміло, що корені знаменника дійсні й різні: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

Розкладемо раціональний дріб на суму елементарних дробів:

$$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти A, B, C. Для цього зведемо праву частину до спільного знаменника:

$$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x-3)}.$$

Знаменники ліворуч та праворуч однакові, тому достатньо прирівняти чисельники:

$$5x^2-6x+1 = A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2).$$

Щоб визначити невідомі коефіцієнти, зазвичай використовують метод невизначених коефіцієнтів, при якому дорівнюються коефіцієнти ліворуч і праворуч, за умови, що степені x однакові. Цей метод буде використано пізніше, якщо наявні дійсній різні коефіцієнти знаменника і набагато швидше можна визначити коефіцієнти, підставивши відомі корені знаменника.

Нехай x послідовно дорівнює $0, 2, 3$. Отримаємо:

$\underline{x=0} \mapsto \quad 1 = 6A; \qquad A = \frac{1}{6};$

$\underline{x=2} \mapsto \quad 20 - 12 + 1 = -2B; \qquad B = -\frac{9}{2};$

$\underline{x=3} \mapsto \quad 45 - 18 + 1 = 3C; \qquad C = \frac{28}{3}.$

Початковий інтеграл дорівнює сумі чотирьох інтегралів з відповідними коефіцієнтами. Обчислимо останні:

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx = \int dx + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x} - \frac{9}{2}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{28}{3}\int \frac{dx}{x-3} =$$

$$= x + \frac{1}{6}ln|x| - \frac{9}{2}ln|x-2| + \frac{28}{3}ln|x-3| + C.$$

8.5.2 Інтегрування раціональних дробів, корені знаменника яких дійсні та серед яких є кратні

Нехай дано правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменник якого має дійсні корені, серед яких є кратні:

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2} \dots (x-a_n)^{\alpha_n}. \qquad (8.13)$$

У такому разі раціональний дріб можна розкласти на найпростіші дробі так:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{B}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \frac{C}{(x-a_1)^{\alpha_1-2}} + \dots + \frac{D}{x-a_1} + \dots + \frac{E}{x-a_n}. \qquad (8.14)$$

Отже, зрозуміло, що кореню a_i кратності α_i відповідає α доданків; кожен наступний дріб має степінь на одиницю менший від попереднього і так до першого. Інтегрування отриманих дробів виконується за формулами 2, 7 таблиці 8.1. Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 8.17. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{3x^2+30x-25}{x^3+5x^2} dx.$$

Розв'язання. Раціональний дріб правильний. Знайдемо корені знаменника і розкладемо його на множники. Для цього винесемо спільний множник за дужки:

$$x^3 + 5x^2 = x^2(x+5).$$

Отже, знаменник має корінь $x = 0$ кратності 2; а корінь $x = -5$ - кратності 1.

Розкладемо дріб на складники:

$$\frac{3x^2+30x-25}{x^3+5x^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+5}.$$

Зведемо дроби до спільного знаменника і дорівняємо чисельники:

$$3x^2 + 30x - 25 = A(x+5) + Bx(x+5) + Cx^2.$$

Знайдемо невизначені коефіцієнти. Для цього підставимо відомі нам корені в отриману тотожність. Відомих різних коренів два, а невідомих коефіцієнтів – три. Вирішити цю проблему можна так. Підставимо у тотожність будь-яке число; отримаємо вираз, який містить усі коефіцієнти; підставимо вже відомі два коефіцієнти; і знайдемо невідомий третій:

$\underline{x = 0} \mapsto \quad -25 = 5A; \quad A = -5;$

$\underline{x = -5} \mapsto \quad 75 - 150 - 25 = 5C; \quad C = -4;$

$\underline{x = 1} \mapsto \quad 3 + 30 - 25 = 6A + 6B + C;$

$8 = -30 + 6B - 4; \quad B = 7.$

Перепишемо початковий інтеграл у такому вигляді:

$$\int \frac{3x^2+30x-25}{x^3+5x^2} dx = -5\int \frac{dx}{x^2} + 7\int \frac{dx}{x} - 4\int \frac{dx}{x+5} =$$

$$= \frac{5}{x} + 7ln|x| - 4ln|x+5| + C.$$

8.5.3 Інтегрування раціональних дробів, серед коренів знаменника якого є комплексні

Нехай дано правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменник якого має різні комплексні корені:

$$Q(x) = (x^2 + p_1x + q_1) \dots (x^2 + p_sx + q_s). \qquad (8.15)$$

В такому разі раціональний дріб набуде такого вигляду:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Bx+C}{x^2+p_1x+q_1} + \cdots + \frac{Dx+E}{x^2+p_sx+q_s}. \qquad (8.16)$$

Обчисленню інтегралів такого вигляду було приділено достатньо уваги у розділі 8, тому звернімося до прикладів.

Приклад 8.18. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{8x^2-22x+35}{(x-4)(x^2+9)}dx.$$

Розв'язання. Раціональний дріб правильний. Знайдемо корені знаменника. Знаменник має один дійсний корінь $x = 4$ і два комплексних, отримані шляхом розв'язання рівняння $x^2 = -9$,тому під час розкладання раціонального дробу використаємо формули (8.12) і (8.16):

$$\frac{8x^2-22x+35}{(x-4)(x^2+9)} = \frac{A}{x-4} + \frac{Bx+C}{x^2+9}.$$

Зведемо дроби до спільного знаменника і прирівняємо чисельники:

$$8x^2 - 22x + 35 = A(x^2 + 9) + (Bx + C)(x - 4).$$

Тільки один невідомий коефіцієнт можна визначити за допомогою розглянутого прийому:

$\underline{x = 4}$: $\qquad 128 - 88 + 35 = 25A; \qquad A = 3.$

Отже, познайомимося з методом невизначених коефіцієнтів. Розкриємо дужки у правій частині тотожності і прирівняємо коефіцієнти з однаковими степенями ліворуч і праворуч. Отримаємо систему з трьох рівнянь із трьома невідомими. Розв'язати її можна за допомогою будь-якого методу, розглянутого в розділі 1.3, або підставити знайдений коефіцієнт у перше й друге рівняння:

$$8x^2-22x+35=Ax^2+9A+Bx^2+Cx-4Bx-4C;$$

$$\begin{array}{r|ll} x^2 & 8=A+B & B=8-A=8-3=5 \\ x & -22=C-4B & C=4B-22=20-22=-2 \\ x^0 & 35=9A-4C & \end{array}$$

Знайдемо інтеграл

$$\int\frac{8x^2-22x+35}{(x-4)(x^2+9)}dx=3\int\frac{dx}{x-4}+\int\frac{5x-2}{x^2+9}dx=3\int\frac{dx}{x-4}+5\int\frac{xdx}{x^2+9}-$$

$$-2\int\frac{dx}{x^2+9}=3\int\frac{dx}{x-4}+\frac{5}{2}\int\frac{d(x^2+9)}{x^2+9}-2\int\frac{dx}{x^2+9}=$$

$$=3ln|x-4|+\frac{5}{2}ln|x^2+9|-\frac{2}{3}arctg\frac{x}{3}+C.$$

Приклад 8.19. Знайти невизначений інтеграл

$$\int\frac{5x^2-6x+7}{x^3-1}dx.$$

Розв'язання. Раціональний дріб правильний. Знайдемо корені знаменника. За формулою «різниця кубів»

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1).$$

Перший множник дає дійсний корінь $x=1$, а другий – неповний квадрат - має від'ємний дискримінант, тобто корені комплексні. За формулами (8.12) і (8.16) раціональний дріб розкладається так:

$$\frac{5x^2-6x+7}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Зведемо дроби до спільного знаменника і прирівняємо чисельники:

$$5x^2-6x+7=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1).$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти за розглянутою вище схемою:

$\underline{x=1}$: $\quad 6 = 3A; \quad A = 2;$

$$5x^2 - 6x + 7 = Ax^2 + Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx - C;$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \ \ 5 = A + B \qquad\qquad B = 5 - A = 5 - 2 = 3 \\ x & -6 = A - B + C; \\ x^0 & \ \ 7 = A - C \qquad\qquad C = A - 7 = 2 - 7 = 5. \end{array}$$

Шуканий інтеграл набуде такого вигляду

$$\int \frac{5x^2-6x+7}{x^3-1}dx = 2\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{3x-5}{x^2+x+1}dx = 2\int \frac{dx}{x-1} + 3\int \frac{x-\frac{5}{3}}{x^2+x+1}dx =$$

$$= 2\int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{2}\int \frac{2x-\frac{10}{3}}{x^2+x+1}dx = 2\int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{2}\int \frac{2x+1-1-\frac{10}{3}}{x^2+x+1}dx =$$

$$= 2\int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{13}{3}\right)\int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

Обчислимо кожен з отриманих інтегралів:

$$I_1 = 2\int \frac{dx}{x-1} = 2ln|x-1| + C;$$

$$I_2 = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \begin{bmatrix} u = x^2 + x + 1 \\ du = (2x+1)dx \end{bmatrix} = \frac{3}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{3}{2}ln|u| + C =$$

$$= \frac{3}{2}ln|x^2 + x + 1| + C;$$

$$I_3 = -\frac{13}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} = -\frac{13}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \begin{bmatrix} u = x + \frac{1}{2} \\ du = dx \end{bmatrix} = -\frac{13}{2}\int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= -\frac{13}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}arctg\frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = -\frac{13}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Отже маємо: $\int \frac{5x^2-6x+7}{x^3-1}dx =$

$$= 2ln|x-1| + \frac{3}{2}ln|x^2+x+1| - \frac{13}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Зауваження. Інтегрування четвертого типу раціональних дробів, а саме дробів, які мають кратні комплексні корені, виходить за межі курсу, що вивчається.

8.6 Інтегрування частинами

Нехай $u(x)$ і $v(x)$- неперервні диференційовані функції незалежної змінної. Диференціал їх добутку виглядає так:

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Звідси $$udv = d(uv) - vdu.$$

Інтегруємо обидві частини отриманої рівності, маємо

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu.$$

або $$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (8.17)$$

Сутність методу інтегрування частинами полягає в тому, що підінтегральний вираз $f(x)dx$ можна подати у вигляді добутку множників u і dv. Далі за відомим виразом dv шляхом інтегрування знаходимо v і беремо інтеграл $\int vdu$. Цей метод застосовують, якщо ці обидва інтеграли визначити легко, а заданий інтеграл знайти безпосередньо неможливо.

Метод інтегрування частинами надзвичайно важливий, його застосовують для інтегрування багатьох функцій, а також під час розв’язання прикладних задач.

Допоможемо читачеві зорієнтуватися у великій кількості запропонованих функцій, застосувавши підказку. Наведемо найпоширеніші ситуації, коли необхідно використати метод інтегрування частинами. Однак потрібно пам’ятати, що наведений перелік функцій не є вичерпним переліком всіх можливих підінтегральних виразів, а пропонує розглянути лише типові.

Отже, методом інтегрування частинами обчислюються інтеграли типу:

- $$\int P_n(x) \cdot \begin{matrix} sin(ax+b) \\ cos(ax+b) \\ tg(ax+b) \\ ctg(ax+b) \end{matrix} \cdot dx, \qquad \big(u = P_n(x)\big);$$

Зрозуміло, що обирається одна з тригонометричних функцій.

- $\int P_n(x) a^x dx, \qquad \big(u = P_n(x)\big);$

- $\int \log_a(ax+b)\, dx, \qquad (u = \log_a(ax+b));$

- $\int P_n(x) \log_a(ax+b) dx; \quad (u = \log_a(ax+b));$

- $\int \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \cdot dx; \qquad \left(u = \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \right);$

- $\int P_n(x) \cdot \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \cdot dx;$

$$\left(u = \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \right);$$

- тощо…

Зауваження. Перший та другий тип інтегралів цього переліку інтегрується частинами n разів, тобто кількість інтегрування частинами дорівнює степеню многочлена $P_n(x)$.

Приклад 8.20. Знайти невизначений інтеграл

$$\int (8x-3) e^{5x} dx.$$

Розв'язання. За формулою (8.17) маємо

$$\int (8x-3)e^{5x}dx = \begin{bmatrix} u = 8x-3 & dv = e^{5x}dx \\ du = 8dx & v = \int e^{5x}dx = \frac{1}{5}e^{5x} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}(8x-3)e^{5x} - \frac{8}{5}\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}(8x-3)e^{5x} - \frac{8}{25}e^{5x} + C =$$

$$= \frac{1}{25}(40x-15-8)e^{5x} + C = \frac{1}{25}(40x-23)e^{5x} + C.$$

Приклад 8.21. Знайти невизначений інтеграл

$$\int x^2 cos4xdx.$$

Розв'язання. Скористаємося формулою (8.17) і пригадаємо зауваження. Отримаємо многочлен другого ступеня, отже інтегрувати частинами потрібно двічі:

$$\int x^2 cos4xdx = \begin{bmatrix} u = x^2 & dv = cos4xdx \\ du = 2xdx & v = \int cos4xdx = \frac{1}{4}sin4x \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 sin4x - \frac{1}{2}\int xsin4xdx = \begin{bmatrix} u = x & dv = sin4xdx \\ du = dx & v = -\frac{1}{4}cos4x \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 sin4x - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}xcos4x + \frac{1}{4}\int cos4xdx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 sin4x + \frac{1}{8}xcos4x - \frac{1}{32}sin4x + C.$$

Приклад 8.22. Знайти невизначений інтеграл

$$\int arctg(x-1)dx.$$

Розв'язання. За формулою (8.17) маємо

$$\int arctg(x-1)dx = \begin{bmatrix} u = arctg(x-1) & dv = dx \\ du = \frac{dx}{(x-1)^2+1} = \frac{dx}{x^2-2x+2} & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= x\, arctg(x-1) - \int \frac{xdx}{x^2-2x+2} = x\, arctg(x-1) - I.$$

Отримали інтеграл типу, який докладно розглянуто у п.8.4.2. Виконаємо потрібні перетворення:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)+2dx}{x^2-2x+2} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)+2dx}{x^2-2x+2} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)dx}{x^2-2x+2} + \int \frac{dx}{(x-1)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}ln(x^2-2x+2) + arctg(x-1) + C.$$

Отже, отримаємо:

$$\int arctg(x-1)dx = x\, arctg(x-1) - \frac{1}{2}ln(x^2-2x+2) -$$
$$-arctg(x-1) + C.$$

Приклад 8.23. Знайти невизначений інтеграл

$$\int x ln(2x+3)dx.$$

Розв'язання За формулою (8.17) маємо

$$\int x ln(2x+3)dx = \begin{bmatrix} u = ln(2x+3) & dv = xdx \\ du = \frac{2dx}{2x+3} & v = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{x^2}{2} ln(2x+3) - \int \frac{x^2 dx}{2x+3} = \frac{x^2}{2} ln(2x+3) - I.$$

Отримали інтеграл I від неправильного раціонального дробу. Необхідно виділити цілу частину. Розділимо многочлени:

$$\begin{array}{rl|l} & x^2 & 2x+3 \\ - & \underline{x^2+\frac{3}{2}x} & \frac{1}{2}x-\frac{3}{4} \\ & -\frac{3}{2}x & \\ - & \underline{-\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}} & \\ & \frac{9}{4} & \end{array}$$

Підставимо в інтеграл: $I = \int \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{\frac{9}{4}}{2x+3} \right) dx =$

$$= \frac{1}{2}\int xdx - \frac{3}{4}\int dx + \frac{9}{4}\int \frac{dx}{2x+3} = \frac{x^2}{4} - \frac{3}{4}x + \frac{9}{8} ln(2x+3) + C.$$

8.7 Інтегрування деяких класів тригонометричних функцій

8.7.1 Інтеграли типу $\int R(sinx, cosx)dx$

Розглянемо інтеграл $\int R(sinx, cosx)dx$. Спробуємо довести, що універсальна тригонометрична підстановка

$$u = tg\frac{x}{2}, \qquad -\pi < x < \pi,$$

зводить його до інтегралу від раціонального дробу. Виконаємо необхідні перетворення:

$$sinx = 2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} = \frac{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}+sin^2\frac{x}{2}} : \frac{cos^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2};$$

$$cosx = cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2} = \frac{cos^2\frac{x}{2}-sin^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}+sin^2\frac{x}{2}} : \frac{cos^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2};$$

$$x = 2arctgu; \qquad dx = \frac{2du}{1+u^2}. \tag{8.18}$$

Звідси

$$\int R(sinx, cosx)dx = 2\int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2}.$$

Тобто ми отримали інтеграл із дробово-раціональної функції (див. п. 8.5). Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 8.24. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{5-4sinx+3cosx}.$$

Розв'язання. Використаємо формулу (8.18).

$$\int \frac{dx}{5-4sinx+3cosx} = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{5-\frac{8u}{1+u^2}+3\frac{1-u^2}{1+u^2}} = 2\int \frac{du}{5+5u^2-8u+3-3u^2} =$$

$$= \int \frac{du}{u^2-4u+4} = \int \frac{du}{(u-2)^2} = -\frac{1}{u-2} + C = -\frac{1}{tg\frac{x}{2}-2} + C.$$

Зауваження. За допомогою універсальної тригонометричної підстановки можна обчислити будь-який інтеграл розглянутого типу. Але з практичного погляду, щоб запобігти зайвим обчисленням, інколи використовують інші підстановки, а саме:

- в інтегралі типу $\int R(sinx)cosxdx$

підстановка

$$\begin{gathered} u = sinx \\ du = cosxdx \end{gathered} \tag{8.19}$$

зводить його до інтеграла типу $\int R(u)du$;

- в інтеграла типу $\int R(cosx)sinxdx$

підстановка

$$\begin{gathered} u = cosx \\ du = -sinxdx \end{gathered} \tag{8.20}$$

зводить його до інтеграла типу $-\int R(u)du$;

- якщо підінтегральна функція є лише функцією від tgx, тобто $\int R(tgx)dx$,

то підстановка

$$\begin{gathered} u = tgx \\ x = arctgu \\ dx = \frac{du}{1+u^2} \end{gathered} \tag{8.21}$$

зводить його до інтеграла від раціональної функції $\int R(u)\frac{du}{1+u^2}$;

- якщо підінтегральна функція типу $R(sinx, cosx)$, але і $sinx$ і $cosx$ перебувають у парних степенях,

то заміна (8.21) призводить до створення таких виразів:

$$\begin{gathered} sin^2x = \frac{tg^2x}{1+tg^2x} = \frac{u^2}{1+u^2}, \\ cos^2x = \frac{1}{1+tg^2x} = \frac{1}{1+u^2}. \end{gathered} \tag{8.22}$$

Цей прийом запобігає обчисленню інтегралів із раціональних функцій, які мають кратні комплексні корені (ця тема не входить у курс, який вивчається).

Приклад 8.25. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{sinxdx}{(1-cosx)^2}.$$

Розв'язання. Використаємо підстановку (8.20):

$$\int \frac{sinxdx}{(1-cosx)^2} = \begin{bmatrix} u = cosx \\ du = -sinxdx \end{bmatrix} = -\int \frac{du}{(1-u)^2} = -\frac{1}{1-u} + C =$$

$$= -\frac{1}{1-cosx} + C.$$

Приклад 8.26. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{4-3cos^2x+5sin^2x}.$$

Розв'язання. Використаємо підстановку (8.21) і формулу (8.22):

$$\int \frac{dx}{4-3cos^2x+5sin^2x} = \begin{bmatrix} u = tgx \\ sin^2x = \frac{u^2}{1+u^2} \\ cos^2x = \frac{1}{1+u^2} \\ dx = \frac{du}{1+u^2} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{du}{1+u^2}}{4-\frac{3}{1+u^2}+\frac{5u^2}{1+u^2}} =$$

$$= \int \frac{du}{4+4u^2-3+5u^2} = \int \frac{du}{9u^2+1} = \frac{1}{3} arctg3u + C =$$

$$= \frac{1}{3} arctg(3tgx) + C.$$

8.7.2 Інтеграли типу $\int sin^m x\, cos^n x dx$

Нехай m і n - цілі числа. Можливо таке:

а) m або n - непарне число. Нехай для визначеності $m = 2p + 1$. Звідси

$$\int sin^m x \cdot cos^n x dx = \int sin^{2p+1} x \cdot cos^n x dx =$$

$$= \int sin^{2p} x \cdot cos^n x \cdot sinx dx.$$

Зробимо заміну

$$\begin{gathered} u = cosx \\ 1 - u^2 = sin^2 x \\ du = -sinx dx \end{gathered} \tag{8.23}$$

Отримаємо

$$\int sin^m x \cdot cos^n x dx = -\int (1-u^2)^p \cdot u^n du.$$

Аналогічно, якщо $n = 2p + 1$. Заміна

$$\begin{gathered} u = sinx \\ 1 - u^2 = cos^2x \\ du = cosxdx \end{gathered} \qquad (8.24)$$

зводить інтеграл до такого вигляду:

$$\int sin^m x \cdot cos^n xdx = \int u^m \cdot (1 - u^2)^p du;$$

б) m і n- парні числа. Використаємо формули зниження степеня тригонометричних функцій:

$$\begin{gathered} sin^2x = \frac{1}{2}(1 - cos2x); \\ cos^2x = \frac{1}{2}(1 + cos2x). \end{gathered} \qquad (8.25)$$

Ці формули приводять інтеграл до інтеграла того самого типу, але з меншими степенями.

Приклад 8.27. Знайти невизначений інтеграл $\int sin^5 2xdx$.

Розв'язання. У підінтегральному виразі – непарний степінь синуса, тому використаємо формулу (8.23):

$$\int sin^5 2xdx = \int sin^4 2x \cdot sin2xdx = \begin{bmatrix} u = cos2x \\ 1 - u^2 = sin^2 2x \\ du = -2sin2xdx \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (1 - u^2)^2 du = -\frac{1}{2}\int (1 - 2u^2 + u^4)\, du =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{u^5}{5}\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{2}cos2x + \frac{1}{3}cos^3 2x - \frac{1}{10}cos^5 2x + C.$$

Приклад 8.28. Знайти невизначений інтеграл

$$\int cos^4 3x \cdot sin^2 3xdx.$$

Розв'язання. У підінтегральному виразі і синус, і косинус - у парних степенях, тому використаємо формулу (8.25):

$$\int cos^4 3x \cdot sin^2 3xdx = \int \left(\frac{1}{2}(1 + cos6x)\right)^2 \cdot \frac{1}{2}(1 - cos6x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int(1 + 2cos6x + cos^2 6x)\,(1 - cos6x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int(1 + 2cos6x + cos^2 6x - cos6x - 2cos^2 6x - cos^3 6x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int(1 + cos6x - cos^2 6x - cos^3 6x)dx = I$$

Розділимо отриманий інтеграл на чотири. Перші два – табличні, у третьому – підінтегральна функція містить парний степінь косинуса, тому використаємо формулу (8.25); в четвертому – непарний степінь косинуса, тому необхідно використати формулу (8.24). Якщо обчислити всі інтеграли одночасно читачеві важко, радимо розглянути кожен з них окремо. Отже:

$$I = \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int cos6xdx - \frac{1}{16}\int(1 + cos12x)dx -$$

$$-\frac{1}{48}\int(1 - sin^2 6x)^2 d(sin6x) = \frac{1}{8}x + \frac{1}{48}sin6x - \frac{1}{16}x -$$

$$-\frac{1}{192}sin12x - \frac{1}{48}sin6x + \frac{1}{144}sin^3 6x + C =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{192}sin12x + \frac{1}{144}sin^3 6x + C.$$

8.7.3 Інтеграли типу $\int sin\alpha x\ cos\beta x\ dx$, $\int sin\alpha x\ sin\beta x\ dx$, $\int cos\alpha x\ cos\beta x\ dx$

Ці інтегралі безпосередньо обчислюються, якщо підінтегральні функції переписати за формулами перетворення добутку в суму:

$$sin\alpha x\,cos\beta x = \frac{1}{2}[sin(\alpha + \beta)x + sin(\alpha - \beta)x];$$

$$sin\alpha x\,sin\beta x = \frac{1}{2}[cos(\alpha - \beta)x - cos(\alpha + \beta)x]; \qquad (8.26)$$

$$cos\alpha x\,cos\beta x = \frac{1}{2}[cos(\alpha - \beta)x + cos(\alpha + \beta)x].$$

Приклад 8.29. Знайти невизначений інтеграл

$$\int sin3x\, cos5x\, dx.$$

Розв'язання. Використаємо першу з формул (8.26):

$$\int sin3x\, cos5x\, dx = \frac{1}{2}\int\left(sin(3x+5x)+sin(3x-5x)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int(sin8x - sin2x)dx = -\frac{1}{16}cos8x + \frac{1}{4}cos2x + C.$$

8.8 Інтегрування деяких ірраціональних функцій

8.8.1 Інтеграли типу $\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt[m]{\boldsymbol{ax+b}},\ \sqrt[n]{\boldsymbol{ax+b}}, \dots, \sqrt[k]{\boldsymbol{ax+b}}\right)\boldsymbol{dx}$

Щоб позбутися ірраціональностей в підінтегральному виразі, зробимо підстановку

$$ax + b = u^p, \tag{8.27}$$

де p - найменше спільне кратне чисел $m, n, \dots k$. Унаслідок цієї підстановки підінтегральна функція перетвориться в раціональну функцію від $ax + b$.

Приклад 8.30. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x+2}}$.

Розв'язання. Підінтегральний вираз містить тільки корінь квадратний від $x + 2$, тому підстановка $x + 2 = u^2$ (за формулою (8.27)) позбуває ірраціональності цей інтеграл:

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x+2}} = \begin{bmatrix} x+2=u^2 \\ x=u^2-2 \\ dx=2udu \end{bmatrix} = \int \frac{(u^2-2)^3 2udu}{u} =$$

$$= 2\int(u^6 - 6u^4 + 12u^2 - 8)du = \frac{2}{7}u^7 - \frac{12}{5}u^5 + \frac{24}{3}u^3 - 16u + C$$

$$= \frac{2}{7}\sqrt{(x+2)^7} - \frac{12}{5}\sqrt{(x+2)^5} + 8\sqrt{(x+2)^3} - 16\sqrt{x+2} + C.$$

Приклад 8.31. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{\sqrt{2x+1}dx}{\sqrt[3]{2x+1}+1}$.

Розв'язання. Підінтегральний вираз містить квадратний та кубічний корені. Щоб зробити підстановку, знайдемо найменше спільне кратне чисел 2 і 3: $\text{НСК}(2,3) = 6$. Отже, за формулою (8.27)

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}dx}{\sqrt[3]{2x+1}+1} = \begin{bmatrix} 2x+1=u^6 \\ 2dx = 6u^5du \\ dx = 3u^5du \end{bmatrix} = \int \frac{u^3 \cdot 3u^5du}{u^2+1} = 3\int \frac{u^8du}{u^2+1} = I.$$

Ми отримали неправильний раціональний дріб. Перед інтегруванням потрібно виділити цілу частину. Цю процедуру ми вже розглядали, тому надамо результат:

$$I = 3\int \left(u^6 - u^4 + u^2 - 1 + \frac{1}{u^2+1}\right) du =$$

$$= \frac{3}{7}u^7 - \frac{3}{5}u^5 + u^3 - 3u + 3arctgu + C =$$

$$= \frac{3}{7}\sqrt[6]{(2x+1)^7} - \frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x+1)^5} + \sqrt{2x+1} - 3\sqrt[6]{2x+1} +$$

$$+3arctg\sqrt[6]{2x+1} + C.$$

8.8.2 Інтеграли типу

$$\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt{\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{x}^2}\right) \boldsymbol{dx}, \int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt{\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{a}^2}\right) \boldsymbol{dx}, \int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{a}^2}\right) \boldsymbol{dx}$$

Позбутися таких квадратичних ірраціональностей ми зможемо за допомогою тригонометричних підстановок, беручи до уваги базові тригонометричні формули. Розглянемо кожен з цих інтегралів окремо:

а) $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$. Підставимо

$$x = a\,sint. \tag{8.28,а}$$

звідси

$$\begin{aligned} &\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2sin^2t} = a\,cost; \\ &dx = a\,costdt. \end{aligned} \tag{8.28,б}$$

б) $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$. Підставимо

$$x = \frac{a}{sint}. \qquad (8.29,а)$$

звідси

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{sin^2t} - a^2} = a\sqrt{\frac{1-sin^2t}{sin^2t}} = a\frac{cost}{sint} = a\,tgt; \qquad (8.29,б)$$
$$dx = -\frac{acost}{sin^2t}dt.$$

в) $\int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right) dx$. Підставимо

$$x = a\,tgt\,. \qquad (8.30,а)$$

звідси

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2tg^2t + a^2} = a\sqrt{\frac{sin^2t+cos^2t}{cos^2t}} = \frac{a}{cost}; \qquad (8.30,б)$$
$$dx = \frac{a\,dt}{cos^2t}.$$

Проілюструємо використання отриманих формул на прикладах.

Приклад 8.32. Знайти невизначений інтеграл

$$\int x^2\sqrt{4 - x^2}dx.$$

Розв'язання. За формулою (8.28)

$$\int x^2\sqrt{4 - x^2}dx = \begin{bmatrix} x = 2sint \\ dx = 2costdt \\ \sqrt{4 - x^2} = 2cost \end{bmatrix} = \int 4sin^2t\,2cost\,2costdt =$$

$$= 16\int sin^2t\,cos^2t\,dt = 16\cdot\frac{1}{4}\int sin^2 2t\,dt = I.$$

Ми отримали інтеграл від тригонометричної функції. За формулою (8.25)

$$I = 4\cdot\frac{1}{2}\int(1 - cos4t)dt = 2t - \frac{2}{4}sin4t + C =$$

$$= 2arcsin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}sin\left(4arcsin\frac{x}{2}\right) + C.$$

Приклад 8.33. Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{\sqrt{x^2+9}}{x^4}dx$.

Розв'язання. За формулою (8.30)

$$\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^4}dx = \begin{bmatrix} x = 3tgt \\ dx = \frac{3dt}{cos^2t} \\ \sqrt{x^2+9} = \frac{3}{cost} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{3}{cost}\cdot\frac{3dt}{cos^2t}}{81tg^4t} = \frac{1}{9}\int \frac{1}{cos^3t}\cdot\frac{cos^4t}{sin^4t}dt =$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{cost}{sin^4t}dt = I.$$

Ми отримали інтеграл від тригонометричної функції. Використаємо формулу (8.19):

$$I = \begin{bmatrix} u = sint \\ du = costdt \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\int \frac{du}{u^4} = -\frac{1}{9}\cdot\frac{u^{-3}}{-3} + C = \frac{1}{27u^3} + C =$$

$$= \frac{1}{27sin^3t} + C.$$

8.9 Визначений інтеграл

Поняття визначеного інтеграла використовується в багатьох прикладних задачах математики, фізики та інших наук, а саме: обчислення площі плоскої фігури, довжини дуги, об'єму, роботи змінної сили, моментів інерції тощо. Із огляду на це спробуємо розв'язати класичну задачу про площу криволінійної трапеції.

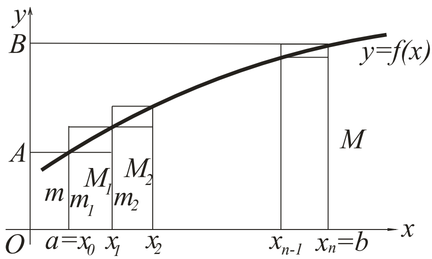


Рисунок 8.1

Нехай на відрізку $[a, b]$ задано неперервну функцію $f(x)$ (рис. 8.1) Позначимо, як і раніше через M найбільше та черезm найменше значення функції $f(x)$ на цьому відрізку. Розділимо відрізок $[a, b]$ на n частин точками $a = x_o,\ x_1,\ x_2, \dots, x_{n-1},\ x_n = b$, якщо $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Позначимо різниці як $x_1 - x_0 = \Delta x_1,\ x_2 - x_1 = \Delta x_2,$

$\ldots, x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$. Найменше та найбільше значення функції $f(x)$ на кожній частині позначимо як $m_1, M_1,\ m_2, M_2, \ldots, m_n, M_n$.

Обчислимо суми:

$$\underline{S_n} = m_1 \cdot \Delta x_1 + m_2 \cdot \Delta x_2 + \cdots + m_n \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i; \quad (8.31)$$

$$\overline{S_n} = M_1 \cdot \Delta x_1 + M_2 \cdot \Delta x_2 + \cdots + M_n \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i. \quad (8.32)$$

Першу суму - $\underline{S_n}$ - називають ***нижньою інтегральною сумою***, а другу - $\overline{S_n}$ - ***верхньою інтегральною сумою***.

У нашому випадку $f(x) \geq 0$. Таким чином нижня інтегральна сума чисельно дорівнює площі вписаної ступінчастої фігури, а верхня інтегральна сума – площі описаної ступінчастої фігури .

На кожному з відрізків $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ оберемо довільну точку, яку позначимо $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$(рис. 8.2).

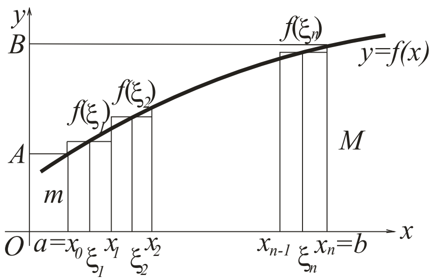


Рисунок 8.2

Обчислимо значення функції в кожній з обраних точок: $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)$. Складемо суму

$$S_n = f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + f(\xi_2) \cdot \Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n) \cdot \Delta x_n =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i. \quad (8.33)$$

Ця сума називається інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$. Оскільки при довільному ξ_i з інтервалу $[x_{i-1}, x_i]$ справедливо $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ і всі $\Delta x_i > 0$, то

$$m_i \cdot \Delta x_i \leq f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \leq M_i \cdot \Delta x_i.$$

Звідси

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i,$$

або

$$\underline{S_n} \leq S_n \leq \overline{S_n}. \qquad (8.34)$$

Геометричний зміст (8.32) такий: площа фігури S, обмежена ламаною, набуває значення, яке міститься між значеннями площі уписаної та описаної ламаних.

Знайдена сума S_n залежить від способу ділення відрізка $[a, b]$ на частини $[x_{i-1}, x_i]$ і від того, де обрано точки ξ_i в цих відрізках.

Позначимо як $max\Delta x_i$ найбільшу з довжин відрізків Δx_i. Зрозуміло, що площа фігури, обмежена ламаною, більше буде наближатися до площі фігури, яка обмежена кривою $f(x)$, якщо $max\Delta x_i \to 0$. До того ж кількість поділів n буде наближатися до нескінченності ($n \to \infty$).

Розглянемо деяку послідовність поділу відрізка $[a, b]$, при якій $max\Delta x_i \to 0$, а $n \to \infty$. Оберемо в кожному частковому інтервалі відповідні ξ_i. Припустимо,що ця впорядкована послідовність інтегральних сум наближається до деякої границі

$$\lim_{max\Delta x_i \to 0} S_n = \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = S. \qquad (8.34)$$

Визначення 8.4. Визначеним інтегралом називають границя до якої наближається n-та інтегральна сума (8.34) у разі наближення до нуля довжини найбільшого часткового інтеграла. Позначається визначений інтеграл так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{max\Delta x_i \to 0, n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i =$$

$$= \lim_{n \to \infty} S_n = S. \qquad (8.35)$$

Ця функція $f(x)$ називається ***підінтегральною***; вираз $f(x)dx$ - ***підінтегральним виразом***, а a і b – ***межами інтегрування***.

Якщо побудувати графік підінтегральної функції $y = f(x)$, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ буде чисельно дорівнювати площі S криволінійної трапеції, яка обмежена кривою $y = f(x)$, прямими $x = a,\ x = b$ і віссю Ox.

Теорема 8.7 (про існування визначеного інтеграла). Якщо функція $f(x)$неперервна на замкненому інтервалі $[a, b]$, то її n-та інтегральна сума прямує до границі при прямуванні до нуля довжини найбільшого часткового інтервалу. Ця границя, тобто визначний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, не залежить від способу розділення інтервалу інтегрування на часткові інтервали та від вибору в них проміжних точок.

Інтегральні суми, складені за різними розподілами інтервалу інтегрування та різними виборами проміжних точок ξ, можуть істотно відрізнятися одна від одної. Для неперервних функцій ці суми перестають відрізнятися при наближенні до нуля найбільшого часткового інтервалу та до нескінченності кількості точок ділення відрізка інтегрування.

8.10 Властивості визначеного інтеграла

Насамперед зауважимо, що визначеним інтегралом від функції є число, яке відповідає цій функції згідно з визначенням (8.34), тому це число не залежить від вибору позначення аргументу підінтегральної функції, тобто від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du. \tag{8.36}$$

Принциповою є і така формула

$$\int_a^b dx = b - a, \tag{8.37}$$

із якої випливає, що будь-яка інтегральна сума для функції $f(x) \equiv 1$ дорівнює $b - a$:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \cdots + x_n - x_{n-1} = x_n - x_0 = b - a$$

Теорема 8.8 (про інтеграл суми). Визначений інтеграл від суми декількох функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b \big(u(x) + v(x) + \cdots + w(x)\big)dx =$$

$$= \int_a^b u(x)dx + \int_a^b v(x)dx + \cdots + \int_a^b w(x)dx. \qquad (8.38)$$

Доведення. За визначенням $\int_a^b f(x)dx$ частину тотожності (8.38), яка стоїть ліворуч можна записати так

$$I = \lim \ \sum_{i=1}^{n}(u_i + v_i + \cdots + w_i)\Delta x_i =$$

$$\lim \ \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta x_i + \ldots + \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i\right).$$

За теоремою про границю суми маємо

$$I = \lim \ \sum_{i=1}^{n} u_i \Delta x_i + \lim \ \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta x_i + \cdots + \lim \ \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i.$$

Звідси, після граничного переходу (8.34) отримаємо частину тотожності (8.38), яка стоїть праворуч:

$$I = \int_a^b u(x)dx + \int_a^b v(x)dx + \cdots + \int_a^b w(x)dx,$$

що й треба було довести.

Теорема 8.9 (про винесення постійного множника). Постійний множник можна виносити за знак інтегралу

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx, \qquad (8.39)$$

де C - константа.

Доведення. За визначенням інтеграла маємо

$$I = \lim \ \sum_{i=1}^{n} Cu_i \Delta x_i.$$

Винесемо константу C за знак суми, а потім за знак границі (за властивістю границь), остаточно отримаємо

$$I = \lim \quad C \sum_{i=1}^{n} u_i \Delta x_i = C \lim \quad \sum_{i=1}^{n} u_i \Delta x_i = C \int_a^b f(x)dx,$$

що і треба було довести.

Теорема 8.10 (про перестановку границь). Якщо верхню та нижню границі визначеного інтеграла переставити місцями, то знак інтеграла зміниться на протилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \qquad (8.40)$$

Доведення. Нехай $a > b$. Якщо інтервал інтегрування $[a, b]$ розбити на частини точками $x_1,\ x_2, \dots, x_{n-1}$, то отримаємо:

$$a > x_1 > x_2 > \cdots > x_{n-1} > b.$$

Різниці $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ будуть від'ємними. Із цього випливає, що усі доданки у (8.32) будуть від'ємними, а після граничного переходу отримаємо:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

що й треба було довести.

Теорема 8.11 (про адитивність інтеграла). Нехай $a < c < b$. Якщо існує визначений інтеграл на відрізках $[a, c]$, $[c, b]$, то існує інтеграл і на відрізку $[a, b]$, до того ж

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (8.41)$$

Доведення: Відомо, що границя інтегральної суми не залежить від способу розбиття інтервалу $[a, b]$ на частини. Розіб'ємо інтервал $[a, b]$ таким чином, щоб точка c завжди була точкою його ділення (рис. 8.3). За властивістю часткових інтегральних сум отримаємо:

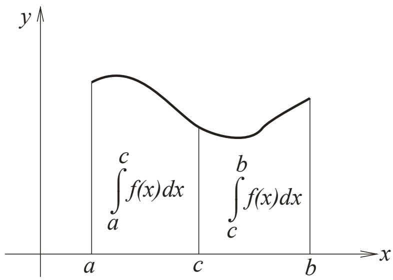


Рисунок 8.3.

$$\sum f(\xi_i)\Delta x_i = \sum\nolimits_1 f(\xi_i)\Delta x_i + \sum\nolimits_2 f(\xi_i)\Delta x_i$$

де в частині тотожності, яка розміщується праворуч, першому доданку відповідають елементи, які включають точки ділення інтервалу $[a, c]$, а в другому доданку – інтервалу $[c, b]$.

За визначенням (8.4) перша часткова сума буде прямувати до інтеграла в границях від a до c, а друга – до інтегралу в границях від c до b:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

що і треба було довести.

Теорема 8.12 (про знак визначеного інтеграла). Якщо підінтегральна функція в інтервалі інтегрування не змінює знаку, то визначений інтеграл є числом того самого знаку, що й підінтегральна функція.

Доведення. Нехай для визначеності $f(x) \geq 0$ в інтервалі $[a, b](a < b)$. В інтегральній сумі $I = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ всі доданки додатні, тобто $I \geq 0$, а границя невід'ємної величини не може бути від'ємною. Звідси отримаємо

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Теорема 8.13 (про оцінку визначеного інтеграла). Значення визначного інтеграла лежить в межах між добутками найменшого та найбільшого значень підінтегральної функції на довжину інтервалу інтегрування:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a), \qquad (8.42)$$

де m і M – найменше та найбільше значення функції $f(x)$ на інтервалі $[a, b]$.

Доведення. Розглянемо дві функції:$M - f(x)$ і $m - f(x)$. Перша з них на інтервалі $[a, b]$ невід'ємна, а друга не додатна. За теоремою 8.12 отримаємо

$$\int_a^b [M - f(x)]dx \geq 0 \quad \text{і} \quad \int_a^b [m - f(x)]dx \leq 0.$$

За формулою (8.37)

$$M(b-a) \geq \int_a^b f(x)dx \quad \text{і} \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx,$$

що й треба було довести.

Геометричний зміст доведеного такий: площа криволінійної трапеції більша за площу прямокутника з основою, яка дорівнює основі трапеції, і висотою, яка дорівнює найменшій ординаті трапеції; і менша за площу прямокутника з тією самою основою і висотою, яка дорівнює найбільшій ординаті трапеції (рис. 8.4).

Теорема 8.14 (про середнє значення). Якщо функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $[a, b]$, то на цьому інтервалі існує хоча б одна точка ξ, для якої буде виконуватися таке

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(\xi). \qquad (8.43)$$

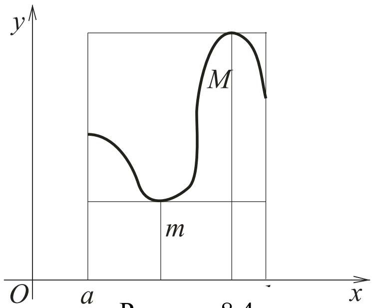


Рисунок 8.4

Доведення. За теоремою 8.13

$$m < \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} < M,$$

звідси

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \mu,$$

де μ – деяке число, розташоване між найменшим та найбільшим значеннями функції $f(x)$ на інтервалі $[a, b]$: $m < \mu < M$. За умовою теореми функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $[a, b]$, тому обов’язково хоча б один раз

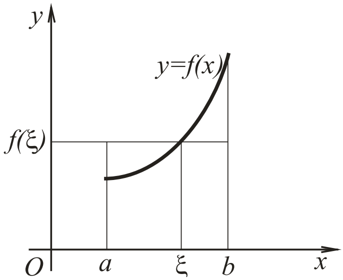


Рисунок 8.5

набуває кожного значення, розташованого між m і M. Із цього випливає, що при деякому $\xi \in [a, b]$ функція $f(x)$ набуде значення $f(\xi) = \mu$, що й потрібно було довести.

Геометричний зміст доведеного такий: площа криволінійної трапеції, обмежена графіком функції $f(x)$, дорівнює площі прямокутника з основою довжини $b - a$ і висотою довжини $f(\xi)$ (рис. 8.5).

Тотожність (8.43) можна записати й так:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a).$$

Отже, теорему про середнє значення можна сформулювати так: визначений інтеграл від неперервної функції дорівнює добутку значення цієї функції в деякій проміжній точці інтервалу інтегрування на довжину інтервалу.

8.11 Обчислення визначеного інтеграла. Формула Ньютона–Лейбниця

Розглянемо визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, у якому нижня межа стала, а верхня – змінна. Зрозуміло, що зі зміною верхньої межі буде змінюватися й значення інтегралу, тобто інтеграл є функцією верхньої межі:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt. \qquad (8.44)$$

Якщо $f(t) \geq 0$, то $\Phi(x)$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції $aAXx$ (рис. 8.6). Значення площі буде змінюватися залежно від змінювання x.

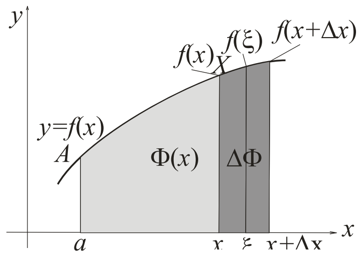


Рисунок 8.6

Знайдемо похідну визначного інтегралу (8.44) за верхньою межею. Для цього розглянемо теорему.

Теорема 8.15. Якщо $f(x)$ неперервна функція і $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, то справедливо таке:

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Доведення. Нехай аргумент x набуває приросту Δx, звідси (за формулою (8.41)) отримаємо

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Обчислимо приріст функції:

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) =$$

$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Щодо отриманого інтеграла застосуємо теорему про середнє значення інтеграла (теорема 8.14):

$$\Delta\Phi = f(\xi)(x + \Delta x - x) = f(\xi) \cdot \Delta x,$$

де $x < \xi < x + \Delta x$.

Знайдемо співвідношення приросту функції до приросту аргументу: $\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\cdot\Delta x}{\Delta x} = f(\xi)$.

За визначенням похідної

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi).$$

Зрозуміло, що при $\Delta x \to 0$, $\xi \to x$, тому

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x).$$

За умовою теореми функція $f(x)$ неперервна, отже отримаємо $\Phi'(x) = f(x)$, що й потрібно було довести.

Теорема 8.16. Значення визначеного інтеграла дорівнює різниці значень будь-якої первісної від підінтегральної функції, обчисленої при $x = a$ і $x = b$, тобто межах інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{8.45}$$

Формула (8.45) називається ***формулою Ньютона–Лейбниця***.

Доведення. Нехай $F(x)$ – деяка первісна від функції $f(x)$. За теоремою 8.15 функція $\int_a^x f(t)dt$ також є первісною від функції $f(x)$. Але дві первісні від однієї функції відрізняються на сталу величину C_1 (теорема 8.1), тому можемо записати:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C_1. \tag{8.46}$$

Спробуємо визначити значення C_1, для цього скористаємося властивістю визначного інтеграла, а саме

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Звідси $F(a) + C_1 = 0$, тобто $C_1 = -F(a)$.

Отже,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Підставимо $x = b$ і повернемося до змінної x, отримаємо

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

що й потрібно було довести.

Різницю функцій зазвичай записують так:

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Беручи до уваги останнє позначення, перепишемо формулу Ньютона–Лейбниця у вигляді, яким і будемо користатися:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{8.47}$$

Формула Ньютона–Лейбниця надає нам головний спосіб обчислення визначених інтегралів без застосування додавання, за допомогою первісною, тобто за допомогою невизначеного інтегрування.

Приклад 8.34. Обчислити інтеграл $\int_1^3 \frac{5x^4-3x^2-7x+13}{2x^2}dx$.

Розв'язання. Використаємо формулу Ньютона–Лейбниця і базові властивості визначеного інтеграла:

$$\int_1^3 \frac{5x^4-3x^2-7x+13}{2x^2}dx = \frac{5}{2}\int_1^3 x^2dx - \frac{3}{2}\int_1^3 dx - \frac{7}{2}\int_1^3 \frac{dx}{x} + \frac{13}{2}\int_1^3 \frac{dx}{x^2} =$$

$$= \frac{5}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_1^3 - \frac{3x}{2}\Big|_1^3 - \frac{7}{2}ln\lceil x\rceil\Big|_1^3 - \frac{13}{2x}\Big|_1^3 =$$

$$= \frac{45}{2} - \frac{5}{6} - \frac{9}{2} + \frac{3}{2} - \frac{7}{2}ln3 + \frac{7}{2}ln1 - \frac{13}{6} + \frac{13}{2} = 23 - \frac{7}{2}ln3.$$

Приклад 8.35. Обчислити інтеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x^3+x}$.

Розв'язання. Для обчислення визначеного інтеграла, використаємо правило знаходження первісної від раціонального дробу:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^3+x} = \left[\begin{array}{l} \qquad \frac{1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\ \quad 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x \\ \quad 1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx \\ x^2 \left| \, 0 = A + B, \quad B = -A = -1 \right. \\ x^1 \left| \, 0 = C \right. \\ x^0 \left| \, 1 = A \right. \end{array}\right] = \int_1^2 \frac{dx}{x} - \int_1^2 \frac{xdx}{x^2+1} =$$

$$= ln|x|\Big|_1^2 - \frac{1}{2}ln|x^2+1|\Big|_1^2 = ln2 - ln1 - \frac{1}{2}ln5 + \frac{1}{2}ln2 =$$

$$= \frac{3}{2}ln2 - \frac{1}{2}ln5 = \frac{1}{2}(ln2^3 - ln5) = \frac{1}{2}ln\frac{8}{5}.$$

Приклад 8.36. Обчислити інтеграл $\int_2^3 \frac{dx}{x^2+2x}$.

Розв'язання. $\int_2^3 \frac{dx}{x^2+2x} = \int_2^3 \frac{dx}{(x^2+2x+1)-1} = \int_2^3 \frac{dx}{(x+1)^2-1} =$

$$= \frac{1}{2}ln\left|\frac{x+1-1}{x+1+1}\right|\Big|_2^3 = \frac{1}{2}ln\left|\frac{x}{x+2}\right|\Big|_2^3 = \frac{1}{2}ln\frac{3}{5} - \frac{1}{2}ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2}ln\frac{6}{5}.$$

8.12 Заміна змінної у визначеному інтегралі

Як і під час знаходженні первісної при невизначеному інтегруванні, одним із найпоширеніших методів є метод заміни змінної, але замінити змінну у визначеному інтегралі набагато складніше.

Нагадаємо, що за формулою (8.7) у невизначеному інтегралі має місце тотожність

$$\int f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)du = \int f(x)dx|_{x=\varphi(u)}.$$

Сформулюємо правило заміни зміни у визначеному інтегралі за допомогою наступної теореми.

Теорема 8.17. Якщо в інтервалі $[\alpha, \beta]$ функції $x = \varphi(u)$, $\varphi'(u)du$ і $f\big(\varphi(u)\big)$ неперервні і $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)du. \tag{8.48}$$

Доведення. Будемо вважати, що невизначений інтеграл ліворуч відомий і дорівнює $F(x)$, звідси

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Відповідно до заміни змінної у невизначеному інтегралі, інтеграл праворуч дорівнює $F\big(\varphi(u)\big)$, а тому

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)dt = F\big(\varphi(\alpha)\big) - F\big(\varphi(\beta)\big) = F(b) - F(a).$$

Порівняємо результати, отримаємо формулу (8.48).

Зауваження 1. Перетворення підінтегрального виразу під час заміни змінної у визначеному інтегралі відбувається, як і у невизначеному, а нові межі інтегрування α і β є коренями рівнянь:

$$\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b.$$

Зауваження 2. Під час заміни змінної у визначеному інтегралі повертатися до попередньої змінної не потрібно. Первісні обчислюються при нових межах інтегрування.

Приклад 8.37. Обчислити інтеграл $\int_0^1 (e^x - 1)^5 e^x dx$.

Розв'язання. $\int_0^1 (e^x - 1)^5 e^x dx = \begin{bmatrix} u = e^x - 1 \\ du = e^x dx \\ u_\text{н} = e^0 - 1 = 0 \\ u_\text{в} = e^1 - 1 \end{bmatrix} =$

$$= \int_0^{e-1} u^5 du = \frac{u^6}{6}\Big|_0^{e-1} = \frac{1}{6}(e-1)^6.$$

Приклад 8.38. Обчислити інтеграл $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

Розв'язання.

$$\int_{-2}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}} = \left[\begin{array}{l} \qquad x+2=t^3 \\ dx=3t^2dt \\ \text{н:} \quad -2+2=t^3; \;\; t^3=0; \;\; t_{\text{н}}=0 \\ \text{в:} \;\; 0+2=t^3; \;\; t^3=2; \;\; t_{\text{в}}=\sqrt[3]{2} \end{array}\right] = \int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{3t^2dt}{1+t} =$$

$$= 3\int_0^{\sqrt[3]{2}} \left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt = 3\left(\frac{t^2}{2}-t+ln|1+t|\right)\Big|_0^{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{2} + 3ln\left|1+\sqrt[3]{2}\right|.$$

Приклад 8.39. Обчислити інтеграл $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{sin\frac{1}{x}dx}{x^2}$.

Розв'язання. Під час обчислення цього визначеного інтегралу використаємо формули (8.40), (8.45), (8.48):

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{sin\frac{1}{x}dx}{x^2} = \left[\begin{array}{c} u=\frac{1}{x} \\ du=-\frac{dx}{x^2} \\ u_{\text{н}}=\pi \\ u_{\text{в}}=\frac{\pi}{2} \end{array}\right] = -\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} sinudu = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sinudu =$$

$$= -cosu\Big|_{\pi/2}^{\pi} = 1-0=1.$$

Приклад 8.40. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3cosx+2}$.

Розв'язання. Під час обчислення цього визначеного інтегралу, використаємо універсальну тригонометричну підстановку (8.18):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3cosx+2} = \begin{bmatrix} u = tg\frac{x}{2} \\ cosx = \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ dx = \frac{du}{1+u^2} \\ u_н = tg0 = 0 \\ u_в = tg\frac{\pi}{4} = 1 \end{bmatrix} = \int_0^1 \frac{\frac{du}{1+u^2}}{3\frac{1-u^2}{1+u^2}+2} = -\int_0^1 \frac{du}{u^2-5} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{5}} ln\left|\frac{u-\sqrt{5}}{u+\sqrt{5}}\right|\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2\sqrt{5}} ln\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right| + \frac{1}{2\sqrt{5}} ln\left|\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right| =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{5}} ln\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right|.$$

Приклад 8.41. Обчислити інтеграл $\int_0^5 x^2\sqrt{25-x^2}dx$.

Розв'язання. Під час обчислення цього визначеного інтегралу, для позбавлення від ірраціональності, використаємо підстановку (8.28) та формули зниження степеня тригонометричних функцій (8.25):

$$\int_0^5 x^2\sqrt{25-x^2}dx = \begin{bmatrix} x = 5sint \\ dx = 5costdt \\ \sqrt{25-x^2} = 5cost \\ \text{н:}\ \ 0 = 5sint;\ \ sint = 0;\ \ t_н = 0 \\ \text{в:}\ 5 = 5sint;\ \ sint = 1;\ \ t_в = \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 25\, sin^2t \cdot 5cost \cdot 5costdt = \frac{625}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 2tdt =$$

$$= \frac{625}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-cos4t)dt = \frac{625}{8}\left(t - \frac{1}{4}sin4t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{625}{16}\pi.$$

8.13 Інтегрування частинами визначених інтегралів

Теорема 8.18. Нехай u і v – диференційовані функції незалежної змінної x на відрізку $[a,b]$, тоді

$$\int_a^b u \cdot dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\, du. \qquad (8.49)$$

Формула (8.49) називається ***формулою інтегрування частинами визначених інтегралів.***

Доведення. Нехай u і v - диференційовані функції незалежної змінної x, тоді справедливе таке:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Проінтегруємо обидві частини тотожності в межах від a до b, отримаємо:

$$\int_a^b (u \cdot v)' dx = \int_a^b u' \cdot v\, dx + \int_a^b u \cdot v'\, dx. \qquad (8.50)$$

За визначенням первісної $\int (u \cdot v)' dx = u \cdot v + C$, тому

$\int_a^b (u \cdot v)' dx = u \cdot v \Big|_a^b$. Тотожність (8.49) можна переписати у такому вигляді

$$uv \Big|_a^b = \int_a^b v \cdot du + \int_a^b u \cdot dv$$

або

$$\int_a^b u \cdot dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v\, du,$$

що й потрібно було довести.

Зауваження. У формулі (8.48) букви u і v означають представлення підінтегрального виразу $f(x)dx$ у вигляді $u(x) \cdot dv(x)$. Не потрібно плутати його із заміною змінної, отже, нових змінних і меж інтегрування під час інтегрування частинами не виникає.

Приклад 8.42. Обчислити інтеграл $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{sin^2x}$.

Розв'язання. За формулою (8.49) маємо

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{sin^2x} = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \frac{dx}{sin^2x} & v = -ctgx \end{bmatrix} = -x \cdot ctgx \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} +$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} ctgxdx = -x \cdot ctgx \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} + ln|sinx| \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} =$$

$$= -\frac{\pi}{3}ctg\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}ctg\frac{\pi}{4} + ln\frac{\sqrt{3}}{2} - ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2}ln\frac{3}{2}.$$

Приклад 8.43. Обчислити інтеграл $\int_1^e ln^3x\,dx$.

Розв'язання. Використаємо формулу (8.49). Зауважимо, що інтегрувати частинами потрібно буде тричі:

$$\int_1^e ln^3x\,dx = \begin{bmatrix} u = ln^3x & du = 3ln^2x\frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} = x \cdot ln^3x\Big|_1^e -$$

$$-3\int_1^e x \cdot ln^2x \cdot \frac{dx}{x} = \begin{bmatrix} u = ln^2x & du = 2lnx\frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= e \cdot ln^3e - 1 \cdot ln^31 - 3\left(x \cdot ln^2x\Big|_1^e - 2\int_1^e x \cdot lnx \cdot \frac{dx}{x}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} u = lnx & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} = e - 3e \cdot ln^2e + 3 \cdot ln^21 +$$

$$+6\left(x \cdot lnx\Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{dx}{x}\right) = e - 3e + 6e \cdot lne - 6 \cdot ln1 -$$

$$-6x\Big|_1^e = -2e + 6e - 6e + 6 = 6 - 2e.$$

8.14 Невласні інтеграли

8.14.1 Невласні інтеграли з нескінченими межами

Визначення 8.5. Нехай функція $f(x)$ визначена на півнескінченому інтервалі $[a,\infty)$ та інтегрована на будь-якому відрізку $[a,\eta]$. Якщо існує границя $\lim_{\eta\to\infty}\int_a^\eta f(x)dx$ то функція $f(x)$ називається ***інтегрованою невласно*** на проміжку $[a,\infty)$, а вказана границя називається ***невласним інтегралом,*** вона позначається $\int_a^\infty f(x)dx$, тобто

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\eta\to\infty}\int_a^\eta f(x)dx. \qquad (8.51)$$

Якщо зазначена границя існує (і набуває скінченого значення), то невласний інтеграл називається ***збіжним***, а якщо не існує (або прямує до нескінченності) - ***розбіжним***.

Якщо відома первісна функція $F(x)$ для підінтегральної функції $f(x)$, то вирішити питання про збіжність невласного інтеграла можна за формулою Ньютона–Лейбниця:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\eta\to\infty} F(\eta) - F(a). \qquad (8.52)$$

Аналогічно визначаються невласні інтеграли:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{\eta\to-\infty}\int_\eta^b f(x)dx = F(b) - \lim_{\eta\to-\infty} F(\eta); \qquad (8.53)$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx\,(-\infty < c < \infty). \qquad (8.54)$$

Із (8.54) зрозуміло, що якщо кожен із невласних інтегралів праворуч збігається, то збігається й невласний інтеграл праворуч.

Приклад 8.44. Обчислити невласний інтеграл (або встановити його розбіжність) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання. За формулою (8.52) маємо

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\eta\to\infty} 2\sqrt{x}\,\Big|_1^\eta = 2\lim_{\eta\to\infty}\sqrt{\eta} - 2\sqrt{1} = \infty - 2 = \infty,$$

отже, цей невласний інтеграл розбігається.

Приклад 8.45. Обчислити невласний інтеграл (або встановити його розбіжність) $\int_0^\infty x\cdot e^{-x^2}dx$.

*Розв'язання:*Замінимо змінну та скористаємося формулою (8.53):

$$\int_0^\infty x\cdot e^{-x^2}dx = \begin{bmatrix} u = -x^2 \\ du = -xdx \\ u_{\text{н}} = 0 \\ u_{\text{в}} = -\infty \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\int_0^{-\infty} e^u du = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 e^u du =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\eta\to-\infty} e^{u} \Big|_{\eta}^{0} = \frac{1}{2} e^{0} - \frac{1}{2} \lim_{\eta\to-\infty} e^{\eta} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Отже,цей невласний інтеграл збігається і дорівнює $\frac{1}{2}$.

8.14.2 Невласні інтеграли від розривних функцій

Визначення 8.6. Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на інтервалі $[a,b)$, а в точці $x = b$ вона або не визначена, або має розрив другого роду. У цьому разі не може йти мова про визначений інтеграл (за визначенням він є границею інтегральних сум), бо функція $f(x)$ не є неперервною на інтервалі $[a,b]$, а отже, границя може не існувати. Позначимо інтеграл від функції, яка має розрив в точці b, так:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (8.55)$$

Якщо існує ця границя (8.54), то функцію $f(x)$ називають ***інтегрованою невласно*** на проміжку $[a,b)$, а зазначена границя називається ***невласним інтегралом*** .

Аналогічно визначають невласний інтеграл, якщо функція $f(x)$ має розрив на нижній межі:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \qquad (8.56)$$

Якщо функція $f(x)$ має розрив в деякій точці $x = c$, яка належить інтервалу інтегрування $[a,b]$, то інтеграл розбивають на два: в одному з них функція має розрив на верхній межі (8.55), а в другому – на нижній (8.56):

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx. \qquad (8.57)$$

Приклад 8.46. Обчислити невласний інтеграл (або встановити його розбіжність) $\int_{0}^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{16-x}}$.

Розв'язання. Функція має розрив на верхній межі, у точці $x = 16$. Знаходячи первісну, виконаємо заміну змінної.

Перепишемо інтеграл за властивістю (8.40), точка розриву опинилася на нижній межі, тому застосуємо формулу (8.56):

$$\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{16-x}} = \begin{bmatrix} u = 16 - x \\ du = -dx \\ u_{\text{н}} = 16 - 0 = 16 \\ u_{\text{в}} = 16 - 16 = 0 \end{bmatrix} = -\int_{16}^{0} \frac{du}{\sqrt[4]{u}} = \int_0^{16} u^{-\frac{1}{4}} du =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} \Bigg|_{0+\varepsilon}^{16} = \frac{4}{3}\sqrt[4]{16^3} - \frac{4}{3}\lim_{\varepsilon \to 0} \sqrt[4]{(0+\varepsilon)^3} = \frac{32}{3} - 0 = \frac{32}{3}.$$

Отже, невласний інтеграл збігається і дорівнює $\frac{32}{3}$.

Приклад 8.47. Обчислити невласний інтеграл (або встановити його розбіжність) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

Розв'язання. Функція має точку розриву посередині інтервалу інтегрування, а саме в точці $x = 1$. Розіб'ємо інтеграл на два (8.57). Дослідимо кожен з отриманих інтегралів на збіжність за формулами (8.55), (8.56):

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3} = \int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^2-1} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{1}{2} ln \left| \frac{x-2-1}{x-2+1} \right| \Bigg|_0^{1-\varepsilon} + \frac{1}{2} ln \left| \frac{x-2-1}{x-2+1} \right| \Bigg|_{1+\varepsilon}^{2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}(-\infty - ln3 + ln1 - \infty) = -\infty,$$

отже, невласний інтеграл розбігається.

8.15. Деякі геометричні застосування визначених інтегралів

8.15.1 Обчислення площі плоскої фігури

За геометричним тлумаченням визначеного інтеграла (8.33) площа криволінійної трапеції (рис. 8.7,а), яка обмежена кривою $y = f(x)$, лініями $x = a$ і $x = b$, і віссю Ox, обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (8.58)$$

Якщо плоска фігура обмежена лініями $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ (рис. 8.7,б), то для обчислення площі, необхідно знайти точки перетину кривих $x = a$ і $x = b$. Ці точки є межами інтегрування.

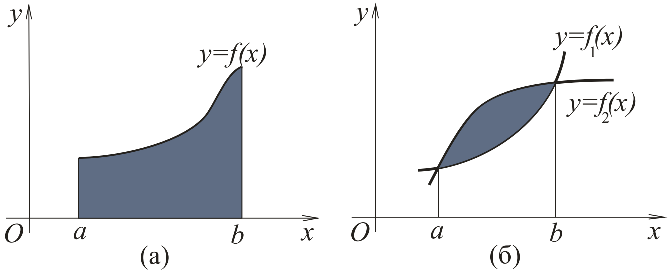


Рисунок 8.7.

Шукану площу плоскої фігури можна знайти як різницю між площами криволінійних трапецій, обмежених лініями $y = f_1(x), y = 0, x = a, x = b$ і $y = f_2(x), y = 0, x = a, x = b$, тобто

$$S = S_2 - S_1 = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx. \qquad (8.59)$$

Приклад 8.48. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$ і $y = x + 2$.

Розв'язання. Побудуємо фігуру (рис. 8.8). Знайдемо точки перетину кривих, для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}; \qquad \begin{aligned} &x^2 = x + 2; \\ &x^2 - x - 2 = 0; \\ &x_1 = -1; \quad x_2 = 2. \end{aligned}$$

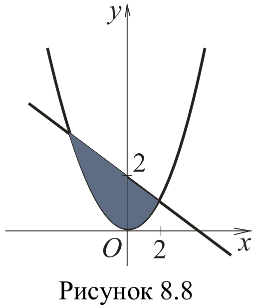


Рисунок 8.8

Отже, точки перетину $x_1 = -1$ і $x_2 = 2$.

Обчислимо площу за формулою (8.59):

$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx =$

$= \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)dx =$

$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2} = 2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = 4\frac{1}{2}\,(\text{од}^2).$

Розглянемо випадок, коли лінії, що обмежують фігуру задані параметричними рівняннями

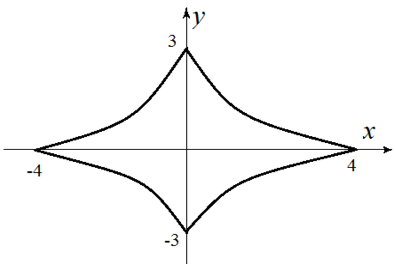
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t). \end{cases}$$

Нехай $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$ і $dx = x_t' \cdot dt$. Тоді зробивши підстановку в інтегралі (8.58), отримаємо формулу для обчислення площини фігури, що обмежена лініями, заданими параметрично:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x_t' \cdot dt. \qquad (8.60)$$

Приклад 8.49. Обчислити площу астроїди, заданої рівнянням $x = 4\cos^3 t$, $y = 3\sin^3 t$.

Розв'язання. Побудуємо фігуру (рис. 8.9).



Обчислимо площу за формулою (8.59). Для цього знайдемо похідну

$$x_t' = 4 \cdot 3\cos^2 t \cdot (-\sin t).$$

Підставимо її у формулу

$$S = \int_0^{2\pi} 3\sin^3 t \cdot 4 \cdot 3\cos^2 t \cdot (-\sin t) \cdot dt =$$

$$= -36\int_0^{2\pi} \sin^4 t \cdot 3\cos^2 t \cdot dt.$$

Скористаємося тригонометричними формулами зниження степені

$S=-\frac{9}{2}\int_0^{2\pi}(1-2\cos 2t+\cos^2 2t)\,(1+\cos 2t)dt=$

$=-\frac{9}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t-\cos^2 2t+\cos^3 2t)\,dt=$

$=-\frac{9}{2}\int_0^{2\pi}dt+\frac{9}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2t\,dt+\frac{9}{4}\int_0^{2\pi}(1+\cos 4t)dt-$

$-\frac{9}{4}\int_0^{2\pi}(1-\sin^2 2t)d(\sin 2t)=-\frac{9}{2}t\,\Big|_0^{2\pi}+\frac{9}{4}\sin 2t\,\Big|_0^{2\pi}+$

$+\frac{9}{4}t\,\Big|_0^{2\pi}+\frac{9}{16}\sin 4t\,\Big|_0^{2\pi}-\frac{9}{4}\sin 2t\,\Big|_0^{2\pi}+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{3}\sin^3 2t\,\Big|_0^{2\pi}=$

$=-9\pi+\frac{9}{2}\pi=-\frac{9}{2}\pi.$

$$S=\left|-\frac{9}{2}\pi\right|=\frac{9}{2}\pi(\text{од}^2).$$

Якщо лінія, що обмежує фігуру, задана рівнянням в ***полярній системі координат***, то за базову фігуру приймається криволінійний сектор (рис. 8.10) – фігура, обмежена лінією $\rho=f(\varphi)$, із якою будь-який промінь, проведений з полюса P, перетинається не більше, ніж однієї точці, та двома іншими променями $\varphi=\alpha$ і $\varphi=\beta$.

Виведемо формулу для обчислення площі такої фігури.

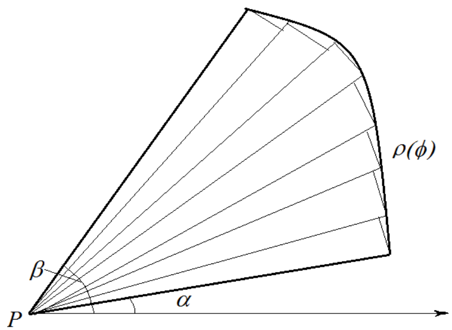


Рисунок 8.10

Розіб'ємо весь вектор на n часткових секторів за допомогою променів нахилених до полярної осі під кутами

$$\varphi_0 = \alpha,\ \ \varphi_1,\ \ \varphi_2,\ \ \dots\ ,\ \ \varphi_n = \beta.$$

Замінимо кожен криволінійний сектор круговим, тобто будемо вважати, що на кожній з ділянок $[\varphi_k, \varphi_{k+1}]$ $(k = 0,1,\dots,n-1)$ функція $f(\varphi)$ постійна й дорівнює значенню $\rho_k = f(\varphi_k)$.

Нагадаємо, що площа кругового сектора з радіусом ρ та центральним кутом α обчислюється за формулою $S = \frac{1}{2}\rho^2\alpha$, тому площа фігури, складеної з n кругових секторів, якими ми замінили криволінійні сектори, буде такою:

$$S_n = \frac{1}{2}f^2(\varphi_0)(\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{1}{2}f^2(\varphi_1)(\varphi_2 - \varphi_1) + \cdots$$

$$\dots + \frac{1}{2}f^2(\varphi_{n-1})(\varphi_n - \varphi_{n-1}) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i, \qquad (8.61)$$

де $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$.

Під час складання інтегральної суми будемо вважати, що проміжні точки ξ_i співпадають із лівими кінцями часткових інтервалів $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$. Перейдемо до границі інтегральних сум за умови, що $n \to \infty$ і найбільший із кутів $\Delta\varphi_i$ прямує до нуля:

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\varphi_i \to 0}} \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)\, d\varphi \qquad (8.62)$$

Приклад 8.50. Обчислити площу фігури, що обмежена першим витком спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$ і відрізком полярної осі.

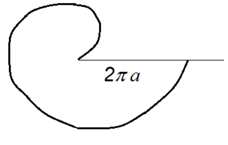


Рисунок 8.11

Розв'язання. Побудуємо фігуру (рис. 8.11) та обчислимо площу за формулою (8.62):

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\frac{\varphi^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^3 (\text{од}^2).$$

8.15.2 Обчислення довжини дуги плоскої кривої

Нехай у декартовій системі координат задано неперервну криву $y = f(x)$ (рис. 8.12). Знайдемо довжину дуги $\breve{AB}$ цієї кривої, яка розташована в інтервалі між $x = a$ і $x = b$.

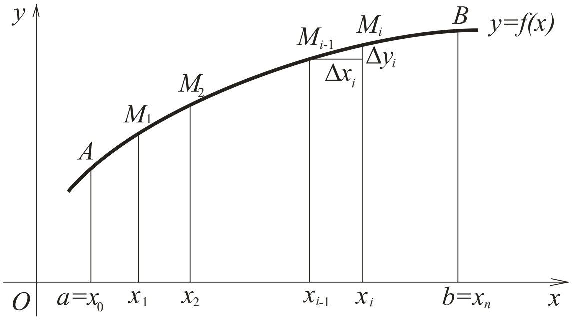


Рисунок 8.12

Поділимо дугу $\breve{AB}$ точками $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots$ з абсцисами $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$. Поєднаємо точки відрізками $AM_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}B$, довжини яких позначимо $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$ відповідно. Ми отримали ламану $AM_1M_2 \dots M_{n-1}B$, яка вписана в дугу $\breve{AB}$. Довжина ламаної складається з довжин відрізків Δl_i:

$$l = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i.$$

Довжиною l дуги $\breve{AB}$ називають границю, до якої наближається довжина ламаної, в разі прямування її найбільшого відрізка до нуля, а числа відрізків $n \to \infty$:

$$l = \lim_{max\Delta l_i \to 0, n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i. \qquad (8.63)$$

Визначимо спосіб обчислення довжини дуги.

Позначимо різниці ординат двох сусідніх точок ділення як $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. За теоремою Піфагора

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i.$$

За теоремою Лагранжа

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i),$$

де $x_{i-1} < \xi_i < x_i$.

Звідси довжина часткового відрізка ламаної дорівнює

$$\Delta l_i = \sqrt{1 + \left(f'(\xi_i)\right)^2} \Delta x_i.$$

Знайдемо границю інтегральної суми, яка дорівнює визначеному інтегралу

$$l = \lim_{\substack{max \Delta l_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(\xi_i)\right)^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx.$$

Кінцева формула для обчислення довжини дуги виглядає так:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx. \qquad (8.64)$$

Приклад 8.51. Знайти довжину лінії $y = ln(1 - x^2)$, яка розташована між $x = 0$ і $x = \frac{1}{2}$.

Розв'язання. Щоб обчислити довжину дуги, використаємо формулу (8.65). До підстановки у формулу виконаємо попередні обчислення, а саме:

$$y' = -\frac{2x}{1 - x^2};$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{4x^2}{(1 - x^2)^2} = \frac{1 - 2x^2 + x^4 + 4x^2}{(1 - x^2)^2} = \frac{1 + 2x^2 + x^4}{(1 - x^2)^2} = \frac{\left(1 + x^2\right)^2}{(1 - x^2)^2};$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 + x^2}{1 - x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2 - \left(1 - x^2\right)}{1 - x^2} dx =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1 - x^2} - \int_0^{\frac{1}{2}} dx = -ln \left|\frac{x-1}{x+1}\right| \Bigg|_0^{1/2} - x \Bigg|_0^{1/2} = -ln\frac{1}{3} - \frac{1}{2} =$$

$$= ln3 - \frac{1}{2} \text{(од.)}$$

Якщо рівняння лінії задане параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, де t_1, t_2 – значення параметра t, що відповідає кінцям дуги, до того ж $t_1 < t_2$. Отже, довжину дуги будемо обчислювати за формулою:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt. \qquad (8.65)$$

Приклад 8.52. Знайти довжину дуги однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (рис. 8.13).

Розв'язання. Для обчислення довжини дуги, використаємо формулу (8.65). До підстановки у формулу виконаємо попередні обчислення, а саме:

$x'(t) = a(1 - \cos t), \quad y'(t) = a \sin t;$

$\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) =$

$= a^2(2 - 2\cos t) = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}.$

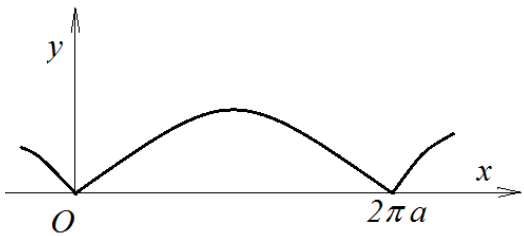


Рисунок 8.13

Підставимо у формулу (8.65):

$L = 2a \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = -4a \cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos\pi - \cos 0) = 8a.$

Нехай лінія задана рівнянням у полярній системі координат $\rho = f(\varphi)$. Вважаючи у виразах

$$x = \rho\cos\varphi\,, \quad y = \rho\sin\varphi$$

полярний кут параметром, отримаємо

$$x' = \rho' \cos\varphi - \rho \sin\varphi, \quad y' = \rho' \sin\varphi + \rho\cos\varphi,$$

що дає змогу виконати такі обчислення:

$$(x')^2 + (y')^2 = (\rho' \cos\varphi - \rho\sin\varphi)^2 + (\rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi)^2 =$$
$$= (\rho')^2\cos^2\varphi - 2\rho'\rho\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\sin^2\varphi + (\rho')^2\sin^2\varphi +$$
$$+2\rho'\rho\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\cos^2\varphi = (\rho')^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) +$$
$$+\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = (\rho')^2 + \rho^2.$$

Отримаємо:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}d\varphi, \qquad (8.66)$$

де α і β – значення полярного кута початку та кінця дуги відповідно.

Приклад 8.53. Знайти довжину дуги логарифмічної спіралі $\rho = 3e^{2\varphi}$ якщо $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Для обчислення довжини дуги використаємо формулу (8.66):

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(3e^{2\varphi})^2 + (6e^{2\varphi})^2}d\varphi =$$
$$= 3\sqrt{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\varphi}d\varphi = \frac{3\sqrt{5}}{2}e^{2\varphi}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}(e^\pi - 1) \text{ (од.)}$$

\

8.15.3 Обчислення об'єму тіла

Нехай дано тіло, яке обмежене замкненою поверхнею, і відома також площа будь-якого його перетину площиною, паралельною осі Ox (рис. 8.14).

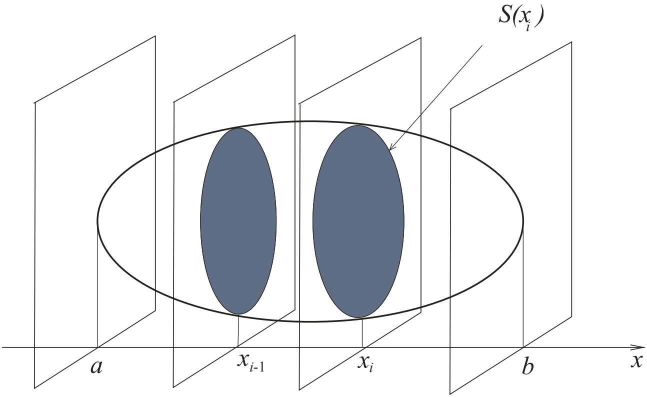


Рисунок 8.14

Будемо вважати, що площа такого перетину є відомою нам функцією $S(x)$.

Нехай усе тіло обмежене двома площинами, перпендикулярними до осі Ox і відомо, що ці площини перетинають вісь Ox в точках $x = a,\ x = b$. Для визначення об'єму разіб'ємо тіло на шари за допомогою площин, які перпендикулярні осі Ox і перетинають вісь у точках $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ Замінимо кожен шар прямим циліндром тієї самої висоти і з основою, яка дорівнює $S(x_i)$. Об'єм прямокутного циліндру дорівнює добутку площі основи на висоту. Отже об'єм n-ступінчастого тіла знаходять як суму:

$$V = \sum_{i=o}^{n} S(x_i)\,\Delta x_i. \qquad (8.67)$$

Об'ємом тіла називають границя інтегральної суми в разі наближення найбільшого відрізка до нуля, а числа $n \to \infty$:

$$V = \lim_{\substack{max\Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=o}^{n} S(x_i)\,\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx. \qquad (8.68)$$

Якщо тіло, об'єм якого ми шукаємо, отримане шляхом обертання криволінійної трапеції, яка обмежена лінією $y = f(x)$ навколо осі Ox, то перпендикулярним перетином із абсцисою x є коло, радіус якого дорівнює відповідній ординаті лінії $y = f(x)$. У такому разі

$$S(x) = \pi \cdot y^2.$$

Отримаємо формулу для обчислення об'єму тіла обертання навколо осі абсцис:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (8.69)$$

Аналогічною виглядає формула для обчислення об'єму тіла обертання навколо осі ординат:

$$V_y = \pi \int_c^d x^2\,dy = \pi \int_c^d \varphi^2(y)\,dy. \qquad (8.70)$$

Приклад 8.54. Знайти об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^3,\ y = 4x$ навколо осі Ox, де $x \geq 0$.

Розв'язання. Знайдемо точки перетину ліній, які обмежують цю фігуру:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 4x \end{cases}; \qquad \begin{aligned} &x^3 = 4x; \quad x^3 - 4x = 0 \\ &x(x^2 - 4) = 0; \\ &x_1 = 0; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = -2. \end{aligned}$$

За формулою (8.69)

$$V = \pi \int_0^2 [y_2^2(x) - y_1^2(x)]\,dx = \pi \int_0^2 (16x^2 - x^6)dx =$$

$$= \pi \left(\frac{16x^3}{3} - \frac{x^7}{7}\right)\Big|_0^2 = \pi\left(\frac{128}{3} - \frac{128}{7}\right) = \frac{512}{21}\pi \ (\text{од}^3).$$

8.15.4 Обчислення площі поверхні тіла обертання

Нехай деяка дуга AB лінії $y = f(x)$ обертається навколо осі Ox (рис. 8.15). Потрібно визначити площу Q поверхні обертання в разі припущення, що функція $f(x)$ має неперервну похідну.

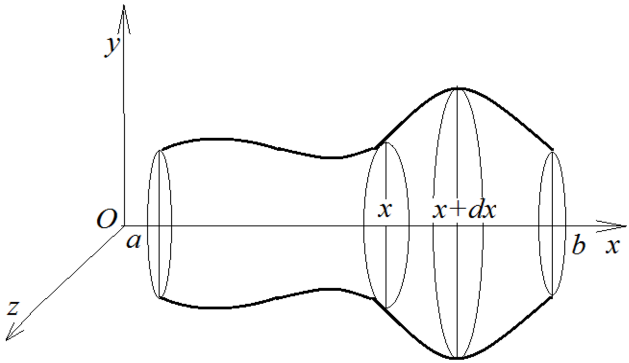


Рисунок 8.15

Позначимо через $Q(x)$ площу, яка відповідає інтервалу $[a;x]$, і визначимо диференціал площі. Проведемо через довільну точку x $(a < x < b)$, площину, перпендикулярну до осі абсцис. Надамо x приріщення dx; тоді площа поверхні $Q(x)$отримає приріст ΔQ, який дорівнює площі поверхні, розташованій між площинам, перпендикулярними до осі абсцис в точках x і $x + dx$. Величина ΔQ задовольняє нерівностям:

$$\frac{2\pi y+2\pi(y+\Delta y)}{2}\sqrt{(dx)^2+(\Delta y)^2} < \Delta Q <$$

$$< \frac{2\pi y+2\pi(y+dy)}{2}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

Дійсно, вираз, розташований ліворуч, вимірює площу поверхні зрізаного конуса, твірною якої є хорда дуги, а вираз, розташований праворуч, вимірює площу поверхні зрізаного конуса, твірною якої є відрізок дотичної. Поділимо всі члени нерівності на $2\pi y\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$, отримаємо:

$$\frac{4\pi y+2\pi\Delta y}{4\pi y}\frac{\sqrt{(dx)^2+(\Delta y)^2}}{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}} < \frac{\Delta Q}{2\pi y\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}} < \frac{4\pi y+2\pi dy}{4\pi y}.$$

За умовою $dx \to 0$ ліва й права частини наближаються до 1, тому

$$\frac{\Delta Q}{2\pi y\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}.$$

Отже, вираз

$$2\pi y\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx$$

і є диференціалом $dQ(x)$. Звідси формула для обчислення площі поверхні тіла обертання навколо осі Ox:

$$Q_x=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx. \quad (8.71)$$

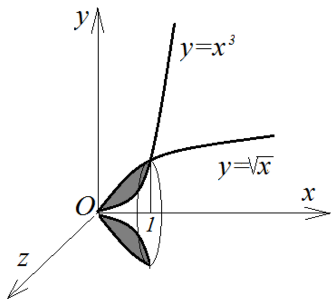
Аналогічно отримуємо формулу для обчислення площі поверхні тіла обертання навколо осі Oy:

$$Q_y=2\pi\int_c^d x\sqrt{1+(x')^2}dy. \quad (8.72)$$

Приклад 8.55. Обчислити площу поверхні обертання фігури, обмеженої лініями $y=\sqrt{x}, y=x^3$ навколо осі Ox.

Розв'язання. Обчислимо шукану площу за формулою (8.71).

Отримане тіло обертання має дві поверхні – зовнішню й внутрішню, тому площу поверхні знаходять як суму



$Q_x = Q_{x1}+Q_{x2}$.

Знайдемо точки перетину ліній, розв'язавши систему:

$$\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=x^3 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x}=x^3 \Rightarrow$$

$$x=x^6 \Rightarrow x(x^5-1)=0$$

Звідси $x_1=0$; $x_2=5$.

Рисунок 8.16

Обчислимо площу внутрішньої поверхні. Для цього про диференціюємо $y_1'=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$Q_{x1}=2\pi\int_0^1\sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx=\pi\int_0^1\sqrt{4x+1}dx=$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{(4x+1)^3}}{3\cdot 4}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)\ (\text{од}^2).$$

Обчислимо площу зовнішньої поверхні. Для цього продиференціюємо $y_2' = (x^3)' = 3x^2$:

$$Q_{x2} = 2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1+(3x^2)^2}dx = 2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{9x^4+1}dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = 9x^4+1 \\ du = 36x^3dx \\ x^3dx = \frac{1}{36}du \\ u_{\text{н}} = 1 \\ u_{\text{в}} = 10 \end{bmatrix} = \frac{\pi}{18}\int_1^{10}\sqrt{u}du = \frac{\pi}{18}\cdot\frac{2\sqrt{u^3}}{3}\Bigg|_1^{10} =$$

$$= \frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)(\text{од}^2).$$

Остаточно маємо

$$Q_x = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right) + \frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right) = \frac{\pi}{54}\left(45\sqrt{5}+20\sqrt{10}-11\right)(\text{од}^2)$$

Контрольні питання

1. Подайте визначення первісної. Скільки первісних має кожна функція?
2. Що таке невизначене інтегрування.
3. Назвіть головні властивості невизначеного інтеграла.
4. Опишіть метод заміни змінної. Проілюструйте його використання прикладами.
5. За допомогою якого методу інтегрують функції, які містять квадратний тричлен? Опишіть алгоритм його використання.
6. Назвіть типи раціональних дробів.
7. Чи можна інтегрувати неправильний раціональний дріб?
8. Як інтегрувати раціональний дріб, корені знаменника якого дійсні й різні?
9. Як інтегрувати раціональний дріб, корені знаменника якого дійсні й серед них є кратні?

10. Як інтегрувати раціональний дріб, серед коренів знаменника якого є комплексні числа?

11. Виведіть формулу для інтегрування частинами.

12. Які класи функцій інтегруються частинами? Чи можна інтегрувати частинами декілька разів, у якому разі?

13. Яка підстановка називається універсальною тригонометричною? Для яких функцій ii зручно використовувати, а для яких – ні?

14. За допомогою якого методу інтегрують тригонометричні функції, що містять парну степінь синуса та косинуса?

15. За допомогою якого методу інтегрують тригонометричні функції, що містять непарну степінь синуса та косинуса?

16. Опишіть методи інтегрування лінійних ірраціональностей.

17. Опишіть методи інтегрування квадратичних ірраціональностей.

18. Подайте визначення визначеного інтеграла.

19. Які прикладні задачі приводять до поняття визначеного інтегралу?

20. Доведіть теорему про існування визначеного інтегралу.

21. Як впливає перестановка меж інтегрування на знак визначеного інтеграла?

22. Чому дорівнює середнє значення визначеного інтеграла?

23. За допомогою якої формули можна оцінити значення визначеного інтеграла?

24. За допомогою якої формули можна обчислити визначений інтеграл?

25. Як проводиться інтегрування методом заміни змінної визначених інтегралів? У чому полягають особливості застосування цього методу для визначених інтегралів?

26. Опишіть метод інтегрування частинами визначених інтегралів.

27. Подайте визначення невласних інтегралів. Які невласні інтеграли називаються збіжними? Які невласні інтеграли називаються розбіжними?

28. Які геометричні задачі можна розв’язати за допомогою визначених інтегралів? Наведіть приклади.

Тема 9 ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

9.1 Базові визначення

Попередньо було розглянуто функції однієї незалежної змінної, але на практиці трапляються випадки, коли деяка величина залежить від двох, трьох або більше незалежних змінних. У такому разі кажуть, що вказана величина є функцією двох або більше змінних. Наших знань навіть з курсу середньої школи, вистачить, щоб проілюструвати це на прикладах.

Приміром, площа прямокутника S є функцією двох незалежних одна від одної змінних величин – сторін прямокутника a і b. Вираз для цієї функції нам добре відомий:

$$S = a \cdot b.$$

Об'єм прямокутного паралелепіпедаV є функцією трьох незалежних змінних величин – ребер паралелепіпеда a, b, c:

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Робота електричного струму A на відрізку електричного ланцюга обумовлюється різницею потенціалів U на кінцях, сили струму I та часу t. Ця функціональна залежність виражається формулою:

$$A = U \cdot I \cdot t.$$

Розглянемо спочатку функцію двох незалежних змінних.

Визначення 9.1. Величина z називається функцією змінних величин x і y на множині D, якщо кожній точці цієї множини відповідає одне визначене значення величини z:

$$z = f(x, y).$$

Множина точок D називається областю визначення функції. Зазвичай областю визначення функції є частина площини, яка обмежена однією чи декількома лініями.

9.2 Метод перерізів

Функція двох змінних $z = f(x, y)$ у просторовій прямокутній системі координат $Oxyz$ задає множину точок, яка є просторовим графіком функції. Цей графік зазвичай називають ***поверхнею рівня.***

В аналітичній геометрії під час вивчення поверхонь другого порядку використовують ***метод перерізів***, який полягає у визначенні вигляду поверхні за її рівнянням шляхом дослідження кривих, утворених при перетині цієї поверхні площинами, паралельними координатним поверхням.

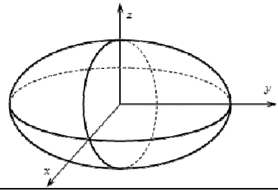
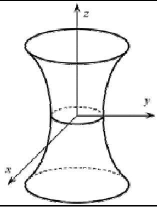
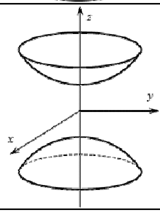
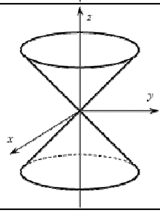
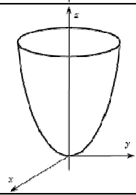
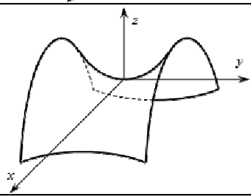
Нехай, наприклад, задана функція $z = f(x, y)$, яка визначає деяку поверхню. Якщо ми надамо аргументу y постійне значення y_0 і будемо змінювати тільки x, то z стане функцією тільки однієї змінної $z = f(x, y_0)$.

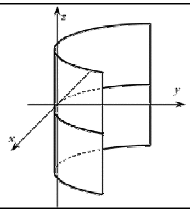
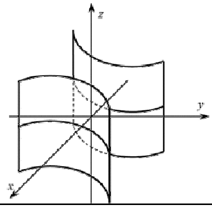
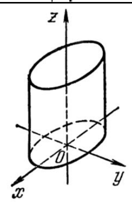
Застосувавши щодо цієї функції відомі методи дослідження функції однієї змінної, можемо з'ясувати особливості змінювання величини z залежно від змінюванняx. З погляду геометрії, ми з'ясували лінію перетину поверхні $z = f(x, y)$ і площини $y = y_o$, паралельної до площини Oxz.

Аналогічно можна з'ясувати поведінку z залежно від y при різних, але постійних значеннях x: $z = f(x_0, y)$. Можна також визначити шляхом функцію $z = f(x, y)$ зведення функції двох змінних до функції однієї змінної, надаючи постійних значень не одній з незалежних змінних, а самій функції. Якщо надати значення $z = z_0$, отримаємо рівняння $f(x, y) = z_0$.

За допомогою цього прийому можна отримати графіки функцій. У таблиці 9.1 наведено графіки найпоширеніших поверхонь другого порядку.

Таблиця 9.1 Поверхні другого порядку

Еліпсоїд $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$	
Однопорожнинний гіперболоїд $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$	
Двопорожнинний гіперболоїд $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$	
Конус $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$	
Еліптичний параболоїд $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$	
Гіперболічний параболоїд $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$	

Параболічний циліндр $y^2 = 2px$	
Гіперболічний циліндр $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	
Еліптичний циліндр $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	

9.3 Границя функції

Визначення 9.2. Число A називають границею функції $f(x,y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$, якщо для всіх значень x і y, які достатньо мало відрізняються від чисел x_0 і y_0, відповідне значення функції так же мало відрізняється від числа A:

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = A. \qquad (9.1)$$

Аналогічно визначають границю функції будь-якого числа змінних.

Нехай точка $P_0(x_0, y_0)$ належить до області визначення функції $f(x,y)$. Як і для функції однієї змінної, приростом функції в заданій точці називається різниця

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

де $\Delta x, \Delta y$ - прирощення аргументів.

Визначення 9.3. Функція $f(x, y)$ називається ***неперервною в точці*** $P_0(x_0, y_0)$, якщо вона визначена в деякому околі цієї точки, та якщо нескінченно малим приростенням аргументів x і y відповідає нескінченно мале приростення функції z, тобто

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} \Delta z = 0 \tag{9.2}$$

або

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} [f(x, y) - f(x_0, y_0)] = 0; \quad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Визначення 9.4. Функція, неперервна в кожній точці області, називається ***неперервній у всій області***.

Неперервні функції двох змінних мають ті самі властивості, що й неперервні функції однієї змінної.

Точка в площині Oxy, у якій не виконується умова неперервності функції, називається ***точкою розриву*** функції.

9.4 Частинні похідні та диференціали

Нехай $z = f(x, y)$ - функція двох незалежних змінних x і y. Вважатимемо аргумент y незмінним і розглянемо отриману при цьому функцію однієї змінної x. Припустимо, що функція $z = f(x, y)$ із цим значеннямx диференційована, отже за визначенням похідної

$$f_x' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}. \tag{9.3}$$

Визначення 9.5. Частинною похідною по x від функції $z = f(x, y)$ називається функція змінних x і y, отримана під час диференціювання $f(x, y)$ по x, якщо припустити, що y є сталою величиною.

Позначати частинні похідні будемо так:

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ z_x',\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial x}[f(x, y)].$$

Аналогічно визначається і частинна похідна за змінноюy, якщо припустити, щоx стала величина.

Приклад 9.1. Знайти частинні похідні функції $z = 2x^3 - 3y^2 - 7xy + 6x - 15$.

Розв'язання. Вважаючи зміннуy сталою, знайдемо похідну за змінною x:

$$z'_x = 6x^2 - 7y + 6.$$

Вважаючи змінну x сталою, знайдемо похідну по змінній y:

$$z'_y = 6y - 7x.$$

Зауваження: аналогічно визначаються частинні похідні функції будь-якого числа змінних.

Приклад 9.2. Знайти частинні похідні функції

$$f(x, y, z) = x \cdot y^z.$$

Розв'язання. Знайдемо похідну за змінною x, вважаючи y, z сталими:

$$f'_x = y^z.$$

Знайдемо похідну за змінною y, вважаючи x, z сталими. Зауважимо, що отримали степеневу функцію:

$$f'_y = x \cdot z \cdot y^{z-1}.$$

Знайдемо похідну по змінній z, вважаючи x, y сталими. Зауважимо, що отримали показникову функцію:

$$f'_z = x \cdot y^z \cdot \ln y.$$

Як бачимо, використовуючи навички диференціювання функції однієї змінної, частинні похідні функції багатьох змінних знайти не складно, якщо перед диференціюванням чітко визначати, які з аргументів є змінною, а які – сталими величинами. Всі правила диференціювання й таблиця похідних не втрачають своєї актуальності. Тому за необхідності згадайте їх!

Визначення 9.6. Приріст, якого набуває функція багатьох змінних у разі зміни лише одного аргументу, називається ***частинним приростом*** функції за відповідною змінною.

Наприклад, для функції двох змінних $z = f(x, y)$ частинні прирости мають такий вигляд:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y);$$

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Визначення 9.7. Частинним диференціалом за x функції $z = f(x, y)$ називається головна частина частинного приросту функції $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$, пропорційна до приросту незалежної змінної.

Аналогічно визначається частинний диференціал за змінною y.

Частинні диференціали незалежних змінних дорівнюють їхнім приростом:

$$dx = \Delta x, \;\; dy = \Delta y.$$

Пригадаємо, як обчислювався диференціал функції однієї змінної (п. 6.11.12) і запишемо правило обчислення частинного диференціалу функції багатьох змінних.

Частинний диференціал функції багатьох змінних дорівнює добутку відповідної частинної похідної на частинний диференціал цієї змінної.

Приміром, для функції двох змінних частинні диференціали знаходять за формулами:

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx; \quad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{9.4}$$

Приклад 9.3. Знайти частинні диференціали функції

$$z(x,y) = x^y + 2\ln(3x - 4y) - 7y^3.$$

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції

$$z'_x = y \cdot x^{y-1} + \frac{6}{3x-4y}; \qquad z'_y = x^y \cdot \ln x + \frac{8}{3x-4y} - 21y^2,$$

і підставимо їх у формулу (9.4):

$$d_x z = \left(y \cdot x^{y-1} + \frac{6}{3x-4y}\right)dx;$$

$$d_y z = \left(x^y \cdot \ln x + \frac{8}{3x-4y} - 21y^2\right)dy.$$

9.5 Повний диференціал функції

Нехай функція $z = f(x,y)$диференційована за x і за y, тому, використовуючи частинні диференціали, можна знайти вирази для приростів функції при малих змінах або x, або y окремо. Розглянемо вираз для приросту функції в разі довільних сумісних змін аргументів x і y. Такий приріст функції

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y) \tag{9.5}$$

називають ***повним приростом функції***.

Геометрично приріст функції під час переходу від точки $P(x,y)$ до точки $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ зображується відрізком QM_1 (рис. 9.1).

Повний приріст функції досить складно подати через прирости незалежних змінних, окрім випадку, коли функція $f(x,y)$ лінійна: $f(x,y) = ax + by + c$. Для неї приріст має такий вигляд: $\Delta z = a\Delta x + b\Delta y$.

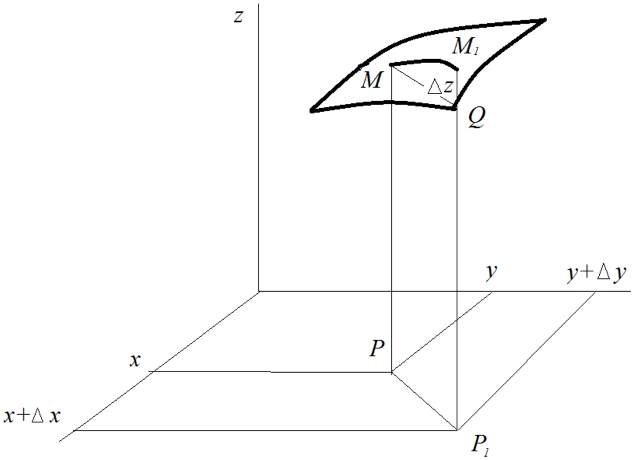


Рисунок 9.1

Але зазвичай для будь-яких заданих значень x і y можна підібрати такі значення коефіцієнтів a і b, при яких вираз $a\Delta x + b\Delta y$ хоч і буде відрізнятися від Δz, але на величину нескінченно малу вищого порядку, ніж відстань $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ між точками P і P_1:

$$\Delta z = a\Delta x + b\Delta y + \alpha,$$

де

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\alpha}{\rho} = 0.$$

Сума $a\Delta x + b\Delta y$ називається ***повним диференціалом*** функції $z = f(x, y)$ і позначається як dz або $df(x, y)$:

$$dz = a\,dx + b\,dy. \tag{9.6}$$

Отже, при $\rho \to 0$ різниця між повним приростом функції Δz та її повним диференціалом dz є величиною нескінченно малою вищого порядку порівняно з ρ, тобто dz є головною частиною приросту Δz.

Визначення 9.8. Повним приростом функції двох незалежних змінних називається головна частина повного приросту функції, лінійна відносно приростів незалежних змінних.

Теорема 9.1. Повний диференціал функції двох незалежних змінних дорівнює сумі добутків частинних похідних функції на диференціали відповідних незалежних змінних.

Доведення. Формула (9.6) справедлива при довільних значеннях dx і dy. У такому разі, вона справедлива й при $dy = 0$. Але за цією умовою повний приріст Δz стає частинним приростом $\Delta_x z$ і отримуємо

$$d_x z = a\,dx,$$

звідки

$$a = \frac{d_x z}{dx} = f'_x(x, y)$$

Аналогічно доводимо, що $b = f'_y(x, y)$. Звідси вираз для повного диференціала при даних значеннях x і y записується як

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

або

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \tag{9.7}$$

що й потрібно було довести.

Зауваження. Аналогічно визначається повний диференціал функції будь-якої кінцевої кількості змінних. Наприклад, для функції трьох змінних $f = f(x, y, z)$ він виглядає так:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz. \tag{9.8}$$

Приклад 9.4. Знайти повний диференціал функції

$$z(x, y) = \cos(xy) - \frac{y^2}{x-4}.$$

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -y\sin(xy) + \frac{y^2}{(x-4)^2}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -x\sin(xy) - \frac{2y}{x-4},$$

і підставимо отримані вирази у формулу (9.7):

$$dz = \left(-y\sin(xy) + \frac{y^2}{(x-4)^2}\right)dx + \left(-x\sin(xy) - \frac{2y}{x-4}\right)dy.$$

9.6 Частинні похідні складних функцій

Нехай аргументи функції

$$z = F(u, v) \tag{9.9}$$

u іv є зі свого боку є функціями незалежних змінних x і y:

$$u = \varphi(x, y); \quad v = \psi(x, y). \tag{9.10}$$

Така функція називається ***складною*** функцію двох незалежних змінних. Звичайно, можна безпосередньо підставити вирази (9.10) у функцію (9.9)

$$z = F\big(\varphi(x, y), \psi(x, y)\big),$$

але це здебільшого приводить до утворення досить складних виразів. Припустимо, що функції $F(u, v)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ мають частинні похідні за усіма своїми аргументами.

Надамо аргументу x приріст Δx, залишаючи аргумент y незмінним. Відповідно до рівнянь (9.10) бачимо, що й функції u і v зі свого боку отримають приріст $\Delta_x u$ і $\Delta_x v$, а тому й функція $z = F(u, v)$ теж набуде приросту Δz, який обчислимо за формулою:

$$\Delta z = \frac{\partial F}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial F}{\partial v}\Delta_x v + \alpha_1 \Delta_x u + \alpha_2 \Delta_x v.$$

Поділимо отриманий вираз на Δx:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha_1\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \alpha_2\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\Delta_x u \to 0$ і $\Delta_x v \to 0$ при неперервних u і v. Зрозуміло, що за цих умов $\alpha_1 \to 0$ і $\alpha_2 \to 0$. Виконаємо граничний перехід при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}; \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Отже, вираз для частинної похідної складної функції за змінноюx буде таким:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{9.11}$$

Аналогічно отримаємо вираз для частинної похідної складної функції за змінною y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \tag{9.12}$$

Приклад 9.5. Знайти частинні похідні складної функції

$$z = u^3 \ln(u + 3v), \text{ де } u = \frac{x}{y}; \quad v = 3x^2 y - 2xy^3.$$

Розв'язання. Використаємо формули (9.11) і (9.12):

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 3u^2 \ln(u + 3v) + \frac{u^3}{u+3v}; \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{3u^3}{u+3v};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy - 2y^3; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 6xy^2.$$

Отже, отримаємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(3u^2 \ln(u + 3v) + \frac{u^3}{u+3v}\right) \cdot \frac{1}{y} + \frac{3u^3}{u+3v} \cdot (6xy - 2y^3);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\left(3u^2 \ln(u + 3v) + \frac{u^3}{u+3v}\right) \cdot \frac{x}{y^2} + \frac{3u^3}{u+3v} \cdot (3x^2 - 6xy^2).$$

Підставимо вирази для u і v в знайдені частинні похідні та виконаємо перетворення, отримаємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(3\left(\frac{x}{y}\right)^2 \ln\left(\frac{x}{y} + 3(3x^2 y - 2xy^3)\right) + \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^3}{\frac{x}{y} + 3(3x^2 y - 2xy^3)}\right) \cdot \frac{1}{y} +$$

$$+\frac{3\left(\frac{x}{y}\right)^3}{\frac{x}{y}+3(3x^2y-2xy^3)}\cdot(6xy-2y^3)=$$

$$=\left(3\frac{x^2}{y^2}\cdot\ln\left(\frac{x}{y}+9x^2y-6xy^3\right)+\frac{x^2}{y^2+9xy^4-2y^6}\right)\cdot\frac{1}{y}+\frac{18x^3y-6x^2y^3}{y^2+9xy^4-2y^6};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\left(3\left(\frac{x}{y}\right)^2\ln\left(\frac{x}{y}+3(3x^2y-2xy^3)\right)+\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^3}{\frac{x}{y}+3(3x^2y-2xy^3)}\right)\cdot\frac{x}{y^2}+$$

$$+\frac{3\left(\frac{x}{y}\right)^3}{\frac{x}{y}+3(3x^2y-2xy^3)}\cdot(3x^2-6xy^2)=$$

$$=-\left(3\frac{x^2}{y^2}\cdot\ln\left(\frac{x}{y}+9x^2y-6xy^3\right)+\frac{x^2}{y^2+9xy^4-2y^6}\right)\cdot\frac{x}{y^2}+$$

$$+\frac{9x^4-18x^3y^2}{y^2+9xy^4-2y^6};$$

9.7 Похідні функції, заданої неявно

Нехай дано функцію $F(x,y)=0$. Зазначимо, що задана неявно функція вже розглядалась у п. 6.1.5.

Теорема 9.2. Нехай функція y від x задана неявно, як $F(x,y)=0$ і $F(x,y)$, $F'_x(x,y), F'_y(x,y)$ - неперервні функції у деякій області D, координати (x,y) довільної точки $M\in D$ задовольняють рівнянню $F(x,y)=0$, крім того, у цій точці $F'_y(x,y)\neq 0$. Тоді $y'_x=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

Доведення. Нехай деякому значенню x відповідає значення функції y і при цьому $F(x,y)=0$. Надамо незалежній змінній x приріст Δx. Функція y набуває приростуΔy, тобто аргументу $x+\Delta x$ буде відповідати значення функції $y+\Delta y$. Оскільки $F(x,y)=0$, то й $F(x+\Delta x,y+\Delta y)=0$. Отже,

$$F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y)=0.$$

Повний приріст функцій, який записаний зліва, можна записати так:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y = 0,$$

де $\alpha_1 \to 0$ і $\alpha_2 \to 0$, коли $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$.

Розділимо останню нерівність на Δx і виразимо:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}+\alpha_1}{\frac{\partial F}{\partial y}+\alpha_2}.$$

Спрямуємо Δx до нуля, маючи на увазі, що й α_1 і α_2 теж наближаються до нуля, а $F_y'(x,y) \neq 0$. Обчислимо границю, отримаємо

$$y_x' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\frac{\partial F}{\partial x}+\alpha_1}{\frac{\partial F}{\partial y}+\alpha_2} = -\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}$$

або

$$y_x' = -\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}, \tag{9.13}$$

тобто наявність похідної доведено й отримано формулу для її обчислення.

Зауваження: Аналогічно визначається частинні похідні функції будь-якої кінцевої кількості змінних. Наприклад, для функції z двох незалежних змінних x, y: $F(x,y,z) = 0$ він виглядає як

$$z_x' = -\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}; \quad z_y' = -\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}. \tag{9.14}$$

Приклад 9.6. Знайти частинні похідні неявної функції $x^3y + y^3z + xz^3 - 3xyz = 0$ та обчислити їх значення у точці $M(-1;2;3)$.

Розв'язання. Використаємо формулу (9.14), для цього обчислимо $F_x'(x,y,z)$, $F_y'(x,y,z)$, $F_z'(x,y,z)$:

$$F_x'(x,y,z) = 3x^2y + z^3 - 3yz;$$

$$F_y'(x,y,z) = 3y^2z + x^3 - 3xz;$$

$F'_z(x,y,z) = 3xz^2 + y^3 - 3xy;$

$z'_x = -\frac{3x^2y+z^3-3yz}{3xz^2+y^3-3xy};$ $\qquad$ $z'_y = -\frac{3y^2z+x^3-3xz}{3xz^2+y^3-3xy}.$

Обчислимо значення цих похідних у точці M:

$z'_x\big|_M = -\frac{3(-1)^2\cdot 2+3^3-3\cdot 2\cdot 3}{3(-1)\cdot 3^2+2^3-3\cdot(-1)\cdot 2} = \frac{15}{13};$

$z'_y\big|_M = -\frac{3\cdot 2^2\cdot 3+(-1)^3-3\cdot(-1)\cdot 3}{3(-1)\cdot 3^2+2^3-3\cdot(-1)\cdot 2} = \frac{44}{13}.$

9.8 Похідні й диференціали вищих порядків

Нехай функція $z = f(x,y)$ має частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y;$$

ці похідні, зі свого боку, є функціями двох незалежних змінних x і y. Диференціюючи отримані функції за незалежними змінними, отримаємо частинні похідні другого порядку.

Визначення 9.9. Частинними похідними другого порядку називаються частинні похідні, отримані під час диференціювання частинних похідних першого порядку.

Кожна частинна похідна першого порядку може бути продиференційована як за змінною x, так і за змінною y,тому отримаємо чотири частинних похідних другого порядку. Визначаємо їх наступним чином:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx} = z''_{xx}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy} = z''_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx} = z''_{yx}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy} = z''_{yy}. \quad (9.15)$$

Похідні f''_{xy} і f''_{yx} називаються ***мішаними***; одна з них отримана шляхом диференціювання спочатку за змінною x, а потім за змінною y, а друга, навпаки, - спочатку за y, а потім за x.

Приклад 9.7. Знайти похідні другого порядку функції $z = x^2y - 2xy^3 - 6x + 2y + 8$.

Розв'язання. Використаємо формулу (9.15)

$z'_x = 2xy - 2y^3 - 6;$ $z'_y = x^2 - 6xy^2 + 2;$

$z''_{xx} = 2y;$ $z''_{yy} = -12xy;$

$z''_{xy} = 2x - 6y^2;$ $z''_{yx} = 2x - 6y^2.$

Цікаво, що мішанні похідні тотожні, чи завжди вони співпадають? Відповідь на це запитання дає наступна теорема.

Теорема 9.3. Якщо функція $z = f(x, y)$ і її частинні похідні f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} визначені й неперервні в околі деякої точки $M(x, y)$, то в цій точці мішані похідні тотожні

$$f''_{xy} = f''_{yx}. \tag{9.16}$$

Доведення. Розглянемо вираз

$$A = \big(f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)\big) -$$
$$-\big(f(x, y + \Delta y) - f(x, y)\big).$$

Якщо ввести допоміжну функцію, що виражається як

$$\varphi(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

то A можна записати у такому вигляді:

$$A = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x).$$

Оскільки припустили, що f'_x визначена в околі точки $M(x, y)$, то отже $\varphi(x)$ диференційована на відрізку $[x; x + \Delta x]$. Але тоді за теоремою Лагранжа маємо $A = \Delta x \varphi'(x_1)$, де $x_1 \in [x; x + \Delta x]$,а

$$\varphi'(x_1) = f'(x_1, y + \Delta y) - f'(x_1, y).$$

Оскільки, f''_{xy} визначена в околі точки $M(x, y)$, то f'_x диференційована на відрізку $[y; y + \Delta y]$, але застосувавши теорему Лагранжа ще раз, отримаємо:

$$f'(x_1, y + \Delta y) - f'(x_1, y) = \Delta y f''_{xy}(x_1, y_1),$$

де $y_1 \in [y; y + \Delta y]$.

Отже початковий вираз A дорівнює

$$A = \Delta x \Delta y f''_{xy}(x_1, y_1). \tag{9.17}$$

Якщо у початковому виразі переставити середні члени й виконати аналогічні перетворення, то отримаємо

$$A = \Delta x \Delta y f''_{xy}(x_2, y_2), \tag{9.18}$$

де (x_2, y_2) – деяка точка в околі $M(x, y)$.

Ліві частини рівностей (9.17), (9.18) дорівнюють A, тому й праві частини дорівнюють одна одній:

$$\Delta x \Delta y f''_{xy}(x_1, y_1) = \Delta x \Delta y f''_{xy}(x_2, y_2),$$

звідки

$$f''_{xy}(x_1, y_1) = f''_{xy}(x_2, y_2).$$

Перейдемо до границі при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$, отримаємо:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(x_1, y_1) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(x_2, y_2)$$

Оскільки похідні f''_{xy} і f''_{yx} неперервні в точці $M(x, y)$ і її околі, то

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(x_1, y_1) = f''_{xy} \text{ і } \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(x_2, y_2) = f''_{yx}.$$

Таким чином, $f''_{xy} = f''_{yx}$, що й потрібно було довести.

9.9 Визначення функції за її повним диференціалом

Нехай x і y – незалежні змінні, а $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ – неперервні функції від них, як і їхні перші частинні похідні. Кажуть, що вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є ***повним***

диференціалом, якщо існує така функція $u(x,y)$, повний диференціал якої становить вираз:

$$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{9.20}$$

З'ясуємо, коли вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ буде повним диференціалом. Відповісти на це запитання допоможе наступна теорема.

Теорема 9.4. Щоб вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ був повним диференціалом, необхідно та достатньо задовольнити тотожності

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{9.21}$$

Доведення.

Необхідність. Припустимо, що функція $u(x,y)$, для якої справедлива рівність (9.21), існує. З виразу (9.7) для повного диференціалу

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Порівнявши рівняння з (9.20), отримаємо:

$$P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Продиференціюємо перше із співвідношень за змінною y, а друге – за x, отримаємо:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

За теоремою (9.3) про рівність мішаних похідних робимо висновок, що

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Достатність. Отже, ми з'ясували, що функція $u(x,y)$ повинна задовольняти двом умовам:

$$1) \ \frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y); \qquad 2) \ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y).$$

Функцій, що задовольняють першій умові, можна підібрати безліч. Усі вони можуть бути описані формулою

$$u = \int P(x,y)dx + \varphi(y), \tag{9.22}$$

де $\varphi(y)$ - довільна функція від y, а інтегрування здійснюється з припущенням, що y - стала. Дійсно, якщо продиференціювати (9.22) за x, то отримаємо: $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$. Далі необхідно підібрати функцію $\varphi(y)$ так, щоб виконалася друга з умов. Для цього продиференціюємо (9.22) за y і прирівняємо отриманий вираз $Q(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx + \varphi'(y) = Q(x,y),$$

звідки

$$\varphi'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx. \tag{9.23}$$

Щоб у (9.23) не виникало протиріччя, на його підставі можна було б шляхом інтегрування знайти $\varphi(y)$, необхідно, щоб права частина цього співвідношення не залежала від x. Доведемо, що в разі виконання умови (9.21) так і буде. Продиференціюємо праву частину (9.23) за змінноюx:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right] = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int P(x,y)dx\right] =$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Зауважимо, що ми знову використали незалежність мішаної похідної від порядку диференціювання (9.16). Отже, похідна за змінноюx тотожно дорівнює нулю, а тому права частина (9.23) не залежить від x і є функцією лише y. Тому шляхом інтегрування можна визначити $\varphi(y)$, до якого входить довільний сталий доданок:

$$\varphi(y) = \int\left[Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right]dy.$$

Підінтегральний вираз – це різниця двох функцій, що залежать від x, тому перед інтегруванням необхідно виконати перетворення, унаслідок яких усі доданки, що містять x, обов'язково зникнуть.

Далі, підставляючи отриманий для $\varphi(y)$ вираз у (9.22), отримуємо функцію $u(x,y)$, для якої диференціальний вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є повним диференціалом.

Теорему доведено.

Під час доведення достатньої умови теореми було фактично отримано алгоритм знаходження функції за її повним диференціалом.

Зауваження. Зрозуміло, що можна змінити порядок дій і спочатку підібрати функцію, яка б задовольняла другій умові, а потім уже першій. В обох випадках ми отримаємо то й самий результат.

Приклад 9.8. Перевірити, чи вираз

$$(3y^2 + 2xy + 2x)dx + (6xy + x^2 + 3)dy$$

є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за повним диференціалу.

Розв'язання. Перевіримо, чи виконується умова (9.21). Тут $P(x,y) = 3y^2 + 2xy + 2x$, $Q(x,y) = 6xy + x^2 + 3$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6y + 2x; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6y + 2x,$$

тобто $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, а тому заданий вираз є повним диференціалом функції. Знайдемо її. Отримаємо

$$1)\ \frac{\partial u}{\partial x} = 3y^2 + 2xy + 2x; \qquad 2)\ \frac{\partial u}{\partial y} = 6xy + x^2 + 3.$$

З першої умови інтегруванням за x знаходимо

$$u = \int(3y^2 + 2xy + 2x)dx + \varphi(y) = 3y^2x + x^2y + x^2 + \varphi(y).$$

Продиференціюємо отриманий вираз за змінною y і виконаємо умову 2:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy + x^2 + \varphi'(y) = 6xy + x^2 + 3.$$

Звідси

$$\varphi'(y) = 6xy + x^2 + 3 - 6xy - x^2 = 3.$$

Отже, доданки, що містять змінну x, зникли, $\varphi'(y) = 3$. Проінтегруємо останній вираз заy, отримаємо:

$$\varphi(y) = 3\int dy = 3y + C.$$

Отже, $u(x, y) = 3y^2x + x^2y + x^2 + 3y + C$.

Перевірити правильність отриманого результату можна шляхом знаходженням повного диференціала отриманої функції.

9.10 Екстремум функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена у відкритій області D, а точка $M(x_o, y_o) \in D$. Кажуть, що функція $f(x, y)$ має в точці M ***максимум*** (***мінімум***), якщо існує ε-окіл точки $M(x_o, y_o)$, що для всіх точок цього ε-околу виконується умова

$$f(x_0, y_0) > f(x, y)\big(\text{або } f(x_0, y_0) < f(x, y)\big).$$

Зауважимо, що згідно з визначенням точка екстремуму функції обов'язково розміщується всередині області визначення.

Визначимо спочатку необхідні умови, за яких функція $z = f(x, y)$ досягає в точці $M(x_o, y_o)$ екстремуму.

Теорема 9.5 (необхідні умови екстремуму). Якщо в точці $M(x_o, y_o)$ функція $z = f(x, y)$ має екстремум, то її частинні похідні в цій точці дорівнюють нулю:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x = x_0, y = y_0} = 0; \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x = x_0, y = y_0} = 0. \quad (9.24)$$

Доведення. Припустимо, що функція $z = f(x, y)$ в точці $M(x_o, y_o)$ має екстремум. Згідно з визначенням екстремуму функція $z = f(x, y)$ при незмінному $y = y_0$, як функція однієї змінної x, досягає екстремуму при $x = x_0$. Як відомо, необхідною умовою цього є нульове значення похідної від функції $f(x, y_0)$ при $x = x_0$, тобто

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x = x_0, y = y_0} = 0.$$

Аналогічно функція $z = f(x, y)$ при незмінному $x = x_0$, як функція однієї змінної y, досягає екстремуму при $y = y_0$, тобто

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x = x_0, y = y_0} = 0.$$

Визначення 9.10. Точка $M(x_o, y_o)$, координати якої обертають на нуль обидві частинні похідні функції $z = f(x, y)$, називається ***стаціонарною точкою*** функції $f(x, y)$.

Достатні умови екстремуму функції багатьох змінних набагато складніші за відповідні умови для функції однієї змінної, тому наведемо ці умови лише для функції двох змінних, не доводячи їх.

Теорема 9.6 (достатні умови екстремуму). Нехай в області D, яка містить стаціонарну точку $M(x_o, y_o)$, функція $z = f(x, y)$ має неперервні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. Обчислимо їх значення у стаціонарній точці, позначивши так:

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M(x_o, y_o)} = A, \ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M(x_o, y_o)} = B, \ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M(x_o, y_o)} = C.$$

Тоді функція $z = f(x, y)$ у стаціонарній точці має:

1) максимум, якщо $A \cdot C - B^2 > 0$ і $A < 0$ (9.25)
2) мінімум, якщо $A \cdot C - B^2 > 0$ і $A > 0$ (9.26)
3) ні максимум, ні мінімум, якщо $A \cdot C - B^2 < 0$ (9.27)
4) невизначеність (потрібні додаткові дослідження), якщо $A \cdot C - B^2 = 0$ (9.28)

Приклад 9.9. Дослідити на екстремум функцію

$$z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

Розв'язання. Знайдемо стаціонарні точки, задовольнивши необхідні умови існування екстремуму (9.24):

$$z'_x = 6x^2 + y^2 + 10x \quad \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases}$$
$$z'_y = 2xy + 2y$$

Розв'яжемо цю систему методом підстановки. Виконавши перетворення у другому рівнянні системи, отримаємо

$$\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ y(x+1) = 0 \end{cases}.$$

Звідси або $y = 0$, або $x = -1$. Підставимо отримані значення в перше рівняння системи, отримаємо

1) $y = 0 \Rightarrow 6x^2 + 10x = 0; \quad x(3x+5) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{5}{3}. \end{array}\right.$

Отже, стаціонарні точки мають координати $M_1(0;0)$ і $M_2\left(-\frac{5}{3};0\right)$.

2) $x = -1 \Rightarrow 6 + y^2 - 10 = 0; \quad y^2 = 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = 2 \\ y_2 = -2. \end{array}\right.$

Отже, стаціонарні точки мають координати $M_3(-1;2)$ і $M_4(-1;-2)$.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$z''_{xx} = 12x + 10; \quad z''_{xy} = 2y; \quad z''_{yy} = 2x + 2.$$

Обчислимо їх значення в кожній зі стаціонарних точок та перевіримо виконання умов (9.25) – (9.28)

1) точка $M_1(0;0)$: $A = 10; \;\; B = 0; \;\; C = 2.$
   $A \cdot C - B^2 = 10 \cdot 2 - 0^2 = 20 > 0; \quad A > 0.$
   У точці M_1 виконується умова (9.26), отже маємо мінімум;
2) точка $M_2\left(-\frac{5}{3};0\right)$: $A = -10; \;\; B = 0; \;\; C = -\frac{4}{3}.$

$A \cdot C - B^2 = -10 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 0^2 = \frac{40}{3} > 0; \quad A < 0.$

У точці M_2 виконується умова (9.25), отже маємо максимум;

3) точка $M_3(-1; 2)$: $A = -2;\ \ B = 4;\ \ \ C = 0.$
$A \cdot C - B^2 = -2 \cdot 0 - 4^2 = -16 < 0.$
У точці M_3 виконується умова (9.27), отже немає ні мінімуму, ані максимуму;

4) точка $M_4(-1; -2)$: $A = -2;\ \ B = -4;\ \ \ C = 0.$
$A \cdot C - B^2 = -2 \cdot 2 - (-4)^2 = -16 < 0.$
У точці M_4 виконується умова (9.27), отже немає ні мінімуму, ані максимуму.

Проведене дослідження дає змогу встановити, що лише в двох із чотирьох стаціонарних точок є екстремум. Обчислимо значення функції в точках екстремуму:

$$z_{min} = z\Big|_{M_1} = 0\,;$$

$$z_{max} = z\Big|_{M_2} = 2 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)^3 + \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot 0 + 5 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + 0 = \frac{125}{27}.$$

9.11 Найбільше та найменше значення функції

Нехай потрібно знайти найбільше та найменше значення функції $z = f(x, y)$ у деякій області (яка розглядається зі своєю межею). Якщо будь-яке з шуканих значень функція набуває всередині області, то це значення буде максимальним. Але може статися так, що найбільше або найменше значення функція набуває в деякій точці, яка розміщується на межі області.

На підставі зазначеного можна сформувати прямує правило знаходження найбільшого та найменшого значення функції у замкненій області.

Правило. Щоб знайти найбільше або найменше значення функції $z = f(x, y)$ в замкненій області, необхідно знайти всі екстремуми функції всередині області, а також найбільші та найменші значення функції на межі області. Найбільше зі всіх цих значень і буде шуканим найбільшим значенням функції в замкненій області, а найменше – відповідно найменшим.

Приклад 9.10. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2y(4 - x - y)$ в області D, обмеженій лініями $x = 0$; $y = 0$; $x + y = 6$.

Розв'язання. Побудуємо область D.

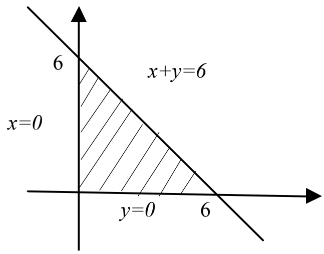


Рисунок 9.2

Область визначення функції – вся координатна площина, тобто $x, y \in R$.

Розв'яжемо задачу на екстремум всередині області D. Для цього перепишемо функцію

$$z = x^2y(4 - x - y) = 4x^2y - x^3y - x^2y^2.$$

Знайдемо частинні похідні та прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{matrix} z'_x = 8xy - 3x^2y - 2xy^2 \\ z'_y = 4x^2 - x^3 - 2x^2y \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} xy(8 - 3x - 2y) = 0 \\ x^2(4 - x - 2y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 3x + 2y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Звідси отримаємо стаціонарні точки $M_1(0;0)$; $M_2(2;1)$; $M_3(0;4)$; $M_4(0;2)$; $M_5\left(\frac{8}{3};0\right)$. Усі ці точки належать області D. Знайдемо стаціонарні точки на межі області D.

Розглянемо лінію $x = 0\ (0 \le y \le 6)$:$z = 0,\ z'_y = 0$. На цій лінії стаціонарних точок немає.

Розглянемо лінію $y = 0\ (0 \le x \le 6)$: $z = 0,\ z'_x = 0$. На цій лінії стаціонарних точок теж немає.

Розглянемо лінію $y = 6 - x\ (0 \le x \le 6)$:

$z = 4x^2(6 - x) - x^3(6 - x) - x^2(6 - x)^2 = 2x^3 - 12x^2;$

$z'_x = 6x^2 - 24x; \quad z'_x = 0; \quad \Rightarrow$

$x_1 = 0;\ x_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 6;\ y_2 = 2.$

Отже, на цій лінії маємо дві стаціонарні точки $M_6(0; 6);\ M_7(4; 2)$.

Обчислимо значення функції в кожній із знайдених стаціонарних точок:

$$z\Big|_{M_1} = 0;$$

$$z\Big|_{M_2} = 4 \cdot 2^2 \cdot 1 - 2^3 \cdot 1 - 2^2 \cdot 1^2 = 4;$$

$$z\Big|_{M_3} = 4 \cdot 0^2 \cdot 4 - 0^3 \cdot 4 - 0^2 \cdot 4^2 = 0;$$

$$z\Big|_{M_4} = 4 \cdot 0^2 \cdot 2 - 0^3 \cdot 2 - 0^2 \cdot 2^2 = 0;$$

$$z\Big|_{M_5} = 4 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot 0 - \left(\frac{8}{3}\right)^3 \cdot 0 - \left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot 0^2 = 0;$$

$$z\Big|_{M_6} = 4 \cdot 0^2 \cdot 6 - 0^3 \cdot 6 - 0^2 \cdot 6^2 = 0;$$

$$z\Big|_{M_7} = 4 \cdot 4^2 \cdot 2 - 4^3 \cdot 2 - 4^2 \cdot 2^2 = -64.$$

Оберемо серед обчислених значень найбільше та найменше. Отже найбільше значення функція набуває в точці

$M_2(2;1)$ всередині області D: $z\Big|_{M_2} = 4$, а найменше – в точці $M_7(4;2)$ на її межі: $z\Big|_{M_7} = -64$.

9.12 Дотична площина та нормаль до поверхні

Нехай поверхню задано функцією

$$F(x, y, z) = 0, \qquad (9.29)$$

яка диференційована в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що належить цій поверхні, до того ж не всі частинні похідні в цій точці дорівнюють нулю, тобто $\left(F'_x(M_0)\right)^2 + \left(F'_y(M_0)\right)^2 + \left(F'_z(M_0)\right)^2 \neq 0$.

Розглянемо довільну криву L, яка проходить через точку M_0, лежить на поверхні (9.29) і задається рівнянням

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t),$$

де точці M_0 відповідає параметр t_0.

Оскільки крива належить поверхні, координати її точок задовольняють рівнянню (9.29):

$$F\big(x(t), y(t), z(t)\big) = 0. \qquad (9.30)$$

Продиференціюємо (9.30) за параметром t, отримаємо:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = 0. \qquad (9.31)$$

Із цієї рівності випливає, що вектори $\vec{N}\left(F'_x(M_0), F'_y(M_0), F'_z(M_0)\right)$ і $\vec{s}\big(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\big)$ ортогональні (рис. 9.3), до того ж другий із них є напрямним вектором дотичної до кривої L в точці M_0.

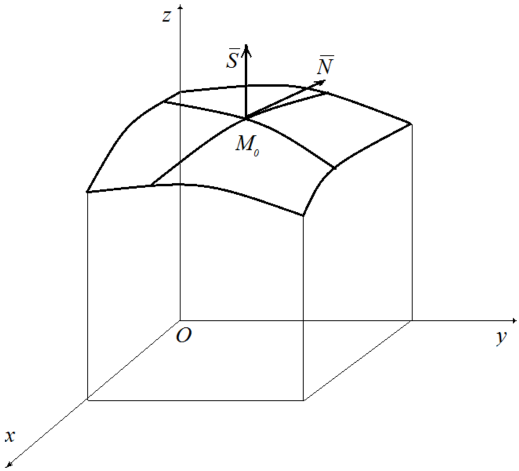


Рисунок 9.3

Крім того, із рівності (9.31) випливає, що дотичні до всіх кривих, які проходять через точку M_0 і лежать на поверхні (9.29), ортогональні до одного й того самого вектора $\vec{N}$. Отже всі ці дотичні лежать в одній і тій самій площині, яка називається ***дотичною площиною*** до поверхні в точці M_0.

Знайдемо рівняння дотичної площини. Оскільки ця площина проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\vec{N}$, то її рівняння має такий вигляд:

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0. \quad (9.32)$$

Нормаллю до поверхні в точці M_0 називають пряму, перпендикулярну до дотичної площини в цій точці.

Оскільки нормаль проходить через точку M_0 і має напрямний вектор $\vec{N}$, то канонічне рівняння нормалі має такий вигляд:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}. \quad (9.33)$$

Якщо рівняння поверхні задано в явній формі $z = f(x,y)$, то виконавши перетворення $F(x,y,x) = f(x,y) - z = 0$, отримаємо

$$F'_x(M_0) = f'_x(x_0,y_0),\ F'_y(M_0) = f'_y(x_0,y_0),\ F'_z(M_0) = -1.$$

Тоді рівняння (9.32), (9.33) набуває такого вигляду:

$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0; \quad (9.34)$$

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}. \quad (9.35)$$

Зауваження 1. Ми розглянули випадок, коли функція (9.29) диференційована в точці M_0 і $\left(F'_x(M_0)\right)^2 + \left(F'_y(M_0)\right)^2 + \left(F'_z(M_0)\right)^2 \neq 0$.

Якщо ці умови не виконуються в деякій точці (її називають особливою), то дотична та нормаль в такій точці можуть не існувати.

Зауваження 2. Якщо поверхня (9.29) є поверхнею рівня для деякої функції $u = u(x,y,z)$, тобто $F(x,y,z) = u(x,y,z) - c = 0$, то вектор $\vec{N} = \left(F'_x, F'_y, F'_z\right) = \left(u'_x, u'_y, u'_z\right)$ буде напрямним вектором нормалі до цієї поверхні рівня.

Приклад 9.11. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $3x^2 - 2y^3 + 7xyz - 15z + 4 = 0$ в точці $M_0(1;-1;2)$.

Розв'язання. Використаємо рівняння (9.32), (9.33). Для цього знайдемо частинні похідні та обчислимо їхні значення в точці M_0:

$F'_x = 6x + 7yz;$ $\qquad F'_x\Big|_{M_0} = 6 - 14 = -8;$

$F'_y = -6y^2 + 7xz;$ $\qquad F'_y\Big|_{M_0} = -6 + 14 = 8;$

$F'_z = 7xy - 15;$ $\qquad F'_x\Big|_{M_0} = -7 - 15 = -22.$

Отже, за формулою (9.32) знайдемо рівняння дотичної площини:

$$-8(x-1)+8(y+1)-22(z-2)=0;$$

$$-8x+8y-22z+60=0;$$

Скоротивши на (-2), отримаємо рівняння дотичної площини:

$$4x-4y+11z-30=0.$$

За формулою (9.33) запишемо рівняння нормалі до поверхні:

$$\frac{x-1}{-8}=\frac{y+1}{8}=\frac{z-2}{-22}.$$

9.13 Скалярне поле. Похідна за напрямком. Градієнт

Визначення 9.11. Область простору, кожній точці M якої відповідає значення деякої скалярної величини $u(M)$, називають ***скалярним полем***, тобто, скалярне поле – це скалярна функція $u(M)$ разом із областю її визначення.

Прикладами скалярних полів є поля температури даного тіла, густини даного неоднорідного середовища, вологості повітря, поле атмосферного тиску, поле потенціалів заданого електростатичного поля тощо.

Щоб задати скалярне поле, достатньо задати скалярну функцію $u(M)$ точки M і область її визначення.

Визначення 9.12. Якщо функція $u(M)$ не залежить від часу, то скалярне поле називається ***стаціонарним***, а скалярне поле, яке змінюється з часом – ***нестаціонарним***.

Надалі ми будемо розглядати лише стаціонарні скалярні поля.

Якщо у просторі обрати прямокутну систему координат $Oxyz$, то точка M у цій системі матиме певні координати $(x;y;z)$, а скалярне поле u стане функцією цих координат:

$$u = u(M) = u(x; y; z).$$

Якщо скалярна функція $u(M)$ залежить тільки від двох змінних, наприклад x і y, то відповідне скалярне поле $u(x; y)$ називається ***плоским***; якщо ж функція $u(M)$ залежить від трьох змінних x, y і z, то скалярне поле $u(x; y; z)$ називається ***просторовим***.

Геометрично плоскі скалярні поля зображують за допомогою ліній рівня, а просторові – за допомогою поверхонь рівня.

Для характеристики швидкості зміни скалярного поля в заданому напрямі введемо поняття похідної за напрямом.

Нехай задано скалярне поле $u(x; y; z)$. Оберемо в ньому точку $M(x; y; z)$ і проведемо з цієї точки вектор $\vec{l}$, напрямні косинуси якого – $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (рис. 9.4).

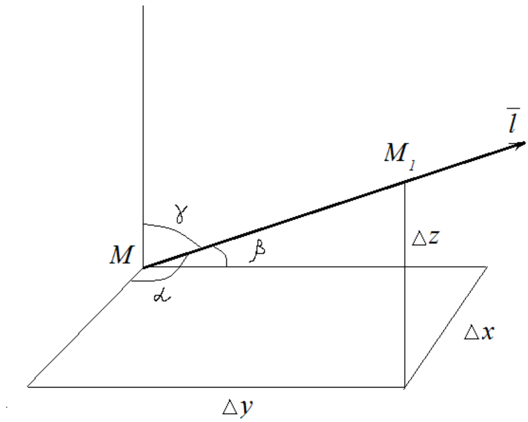


Рисунок 9.4

На векторі $\vec{l}$ на відстані Δl від його початку оберемо точку $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z)$.

Тоді

$$\Delta l = MM_1 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

Обчислимо приріст $\Delta_l u$ функції $u(x;y;z)$ під час переходу від точки M до точки M_1 в напрямі вектора $\vec{l}$:

$$\Delta_l u = u(M_1) - u(M).$$

Якщо існує границя відношення $\frac{\Delta_l u}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$, то цю границю називають похідною функції $u(x;y;z)$ в точці $M(x;y;z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$ і позначають $\frac{\partial u}{\partial l}$, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}.$$

Виведемо формулу для обчислення похідної за напрямом. Припустимо, що функція $u(x;y;z)$ диференційована в точці M. Тоді її повний приріст в цій точці можна записати так:

$$\Delta_l u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z.$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$- нескінченно малі при $\Delta l \to 0$.

Оскільки

$$\Delta x = \Delta l \cos\alpha, \qquad \Delta y = \Delta l \cos\beta, \qquad \Delta z = \Delta l \cos\gamma,$$

то $\frac{\Delta_l u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1 \cos\alpha + \varepsilon_2 \cos\beta + \varepsilon_3 \cos\gamma.$

Перейшовши до границі при $\Delta l \to 0$, отримаємо формулу для обчислення похідної за напрямом

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \tag{9.36}$$

З формули (9.36) випливає, що частинні похідні є окремими випадками похідної за напрямом. Дійсно, якщо $\vec{l}$ збігається з одним з ортів $\vec{i}$, $\vec{j}$ або $\vec{k}$, то похідна за напрямом $\vec{l}$ збігається з відповідною частинною похідною. Наприклад, якщо $\vec{l} = \vec{i}$, то $\alpha = 0, \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, тому

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Подібно до того, що частинні похідні u'_x, u'_y, u'_z характеризують швидкість зміни функції в напрямі осей координат, так і похідна за напрямом $\frac{\Delta u}{\Delta l}$ відображає швидкість зміни скалярного поля $u(x;y;z)$ в точці $M(x;y;z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$.

Абсолютна величина похідної $\left|\frac{\Delta u}{\Delta l}\right|$ співпадає зі значенням швидкості, а знак похідної визначає особливості змінювання функції $u(x;y;z)$ в напрямі - зростання чи спадання.

Зрозуміло, що похідна за напрямом $\vec{l}_1 = -\vec{l}$, протилежним напряму $\vec{l}$, дорівнює похідній за напрямом $\vec{l}$, взятій з протилежним знаком.

Справді, у разі зміни напряму на протилежний кути α, β, γ зміняться на π, тому

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\alpha+\pi) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\beta+\pi) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(\gamma+\pi) = -\frac{\partial u}{\partial l}.$$

Фізичний зміст цього результату такий: зміна напряму на протилежний не впливає на значення швидкості зміни поля, а тільки на особливості змінювання поля. Якщо, наприклад, в напрямі $\vec{l}$ поле зростає, то в напрямі $\vec{l}_1 = -\vec{l}$ воно спадає, і навпаки.

Якщо поле плоске, тобто задається функцією $u(x;y)$, то напрям вектора $\vec{l}$ цілком визначається кутом $\alpha = (\vec{l}, Ox)$, тому, прийнявши в формулі (9.36) $\gamma = \frac{\pi}{2}$ та $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha. \qquad (9.37)$$

Приклад 9.12. Знайти похідну функції $u = x^2 \cdot e^{yz}$ в точці $A(4;0;-1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(3;-2;5)$.

Розв'язання. Визначимо частинні похідні функції u:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \cdot e^{yz}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 z \cdot e^{yz}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^2 e \cdot e^{yz}.$$

Обчислимо їхні значення в точці A:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A = 2 \cdot 4 \cdot e^0 = 8;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A = 16 \cdot (-1) \cdot e^0 = -16;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A = 16 \cdot 0 \cdot e^0 = 0.$$

Координати вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB} = (-1; -2; 6)$, його модуль

$$|\vec{l}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{41},$$

звідси напрямні косинуси набувають таких значень:

$$\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{41}}; \quad \cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{41}}; \quad \cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{41}}.$$

За формулою (9.36) обчислимо похідну за напрямом вектора:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 8 \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{41}}\right) + (-16) \cdot \left(\frac{-2}{\sqrt{41}}\right) + 0 \cdot \frac{6}{\sqrt{41}} = \frac{24}{\sqrt{41}}.$$

Визначення 9.13. Вектор, координатами якого є значення частинних похідних функції $u(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$, називають градієнтом функції в цій точці і позначають $\operatorname{grad} u$. Отже,

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \vec{k}. \tag{9.37}$$

Властивості градієнта:

1. Похідна в даній точці за напрямом вектора $\vec{l}$ має найбільше значення, якщо напрям вектора $\vec{l}$ збігається з напрямом градієнта, причому

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{max} = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \tag{9.38}$$

Тобто, швидкість зростання скалярного поля в довільній точці максимальна у напрямі градієнта. Зрозуміло, що у напрямі, протилежному напряму градієнта, поле зменшуватиметься найшвидше.

2. Похідна за напрямом вектора, перпендикулярного до градієнта, дорівнює нулю. Інакше кажучи, швидкість зміни поля у напрямі, перпендикулярному до градієнта, дорівнює нулю, тобто скалярне поле залишається сталим.

3. Вектор-градієнт у кожній точці поля $u(x,y,z)$ перпендикулярний до поверхні рівня, яка проходить через цю точку.

4. Справедливі рівності:

$$\operatorname{grad}(u+v)=\operatorname{grad}u+\operatorname{grad}v;$$

$$\operatorname{grad}(Cu)=C\operatorname{grad}u\,,\quad C=const;$$

$$\operatorname{grad}(u\cdot v)=v\cdot\operatorname{grad}u+u\cdot\operatorname{grad}v;$$

$$\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\cdot\operatorname{grad}u-u\cdot\operatorname{grad}v}{v^2};$$

$$\operatorname{grad}f(u)=\frac{\partial f}{\partial u}\operatorname{grad}u,$$

які випливають із визначення градієнта.

Приклад 9.13. Обчислити градієнт функції $u=x^2-5y^2+7z-3xz+16$ в точці $A(-1;3;-6)$.

Розв'язання. Визначимо частинні похідні та обчислимо їхні значення в точці A:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x-3z;\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A=2\cdot(-1)-3\cdot(-6)=16;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=10y;\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A=10\cdot 3=30;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=7z-3x;\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A=7\cdot(-6)-3(-1)=-39.$$

Використаємо формулу (9.37):

$$\operatorname{grad} u = 16 \cdot \vec{i} + 30 \cdot \vec{j} - 39 \cdot \vec{k}.$$

Приклад 9.14. Знайти найбільшу швидкість зростання поля $u = 5x^2 + 4z - y^z$ в точці $A(4; -1; 0)$.

Розв'язання. Визначимо частинні похідні та обчислимо їхні значення в точці A:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 10x; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A = 10 \cdot 4 = 40;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -z \cdot y^{z-1}; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A = -0 \cdot 1^{0-1} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 4 - y^z \cdot \ln y; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A = 4 - 1^0 \cdot \ln 1 = 4.$$

За властивістю (9.38) отримаємо:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{max} = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{40^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{1616} = 4\sqrt{101}.$$

Контрольні питання

1. Подайте визначення функції декількох змінних.
2. В чому полягає сутність методу перерізів? Наведіть приклад побудови просторової фігури за допомогою методу перерізів.
3. Надайте визначення частинних похідних. Як обчислюються частинні похідні функцій декількох змінних?
4. Надайте визначення та наведіть формулу для обчислення частинного диференціалу.
5. Що таке повний диференціал функції двох змінних? За якою формулою обчислюється диференціал функції двох змінних.
6. Що таке складна функція двох змінних? Як обчислити частинні похідні складної функції?

7. Надайте визначення функції, заданої неявно та наведіть формулу для обчислення частинних похідних. Проілюструйте прикладом.

8. За яким правилом обчислюються похідні вищих порядків?

9. Скільки частинних похідних другого порядку існує для функції двох змінних?

10. Чи залежить мішана похідна другого порядку функції двох незалежних змінних від порядку диференціювання? Доведіть своє твердження.

11. У якому разі вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ є повним диференціалом функції двох змінних? Доведіть своє твердження.

12. Як знайти функцію за її повним диференціалом? Складіть алгоритм розв'язання задачі.

13. Подайте визначення екстремуму функції двох незалежних змінних. Сформулюйте необхідну та достатню умови існування екстремуму та складіть алгоритм дослідження функції двох незалежних змінних на екстремум.

14. Як можна визначити найбільше та найменше значення функції двох змінних в замкненій області?

15. Подайте визначення дотичної площини та нормалі до поверхні. Запишіть їх рівняння.

16. Що таке скалярне поле? Яке скалярне поле називається стаціонарним?

17. Подайте визначення похідної за напрямом вектора. За якою формулою обчислюють похідну функції трьох змінних за напрямом вектора?

18. Подайте визначення градієнта функції та запишіть формулу для його обчислення. Проілюструйте прикладом.

19. У якому напрямі швидкість зростання скалярного поля є максимальною?

Розділ 10 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

10.1 Загальні положення

Нехай функція $y = f(x)$ відтворює кількісний бік деякого явища. Розглядаючи його, не завжди можна відтворити особливості залежності y від x, але можна встановити залежність x і y та похідних від y за x: $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$, тобто записати диференціальне рівняння.

Визначення 10.1. Диференціальним рівнянням називається рівняння, яке поєднує шукану функцію деякої змінної, цю змінну та похідні різних порядків цієї функції:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Визначення 10.2. Порядком диференціального рівняння називається порядок n найбільшої похідної, що входить до рівняння.

Визначення 10.3. Якщо шукана функція $y = f(x)$ є функцією однієї незалежної змінної, то відповідне диференціальне рівняння називається ***звичайним***.

Надалі будуть розглядатися тільки звичайні диференціальні рівняння.

Визначення 10.4. Будь-яка функція $y = f(x)$, яка при підстановці в рівняння перетворює його на тотожність, називається ***розв'язком*** диференціального рівняння. Розв'язок, поданий у неявному вигляді $f(x, y) = 0$, називається ***інтегралом*** диференціального рівняння.

Визначення 10.5. Розв'язок (інтеграл) диференціального рівняння n-го порядку, який залежить від n довільних незалежних констант, називається ***загальним розв'язком (інтегралом)*** цього рівняння:

$$y = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \text{ або } F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0.$$

Тобто будь-яке диференціальне рівняння має несчисленну множину розв'язків. Надаючи довільним константам C визначених числових значень, отримаємо ***частинні*** розв'язки.

Під час розв'язання конкретних задач будемо розглядати частинні розв'язки. З'ясуємо, як із загального розв'язку можна виокремити необхідний частинний. Для цього треба задати ***початкову умову***, тобто вказати відповідні одне одному значення незалежної змінної, функції, та її похідних:

$$y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0).$$

Приклад 10.1. Знайти розв'язок диференціального рівняння $y' = \frac{y}{x}$.

Розв'язання. Шляхом перевірки можна переконатися, що вираз $y = C \cdot x$ (де C – довільне число) перетворює рівняння на тотожність, тобто є його загальним розв'язком.

Задамо початкову умову $y(2) = 6$. Підставимо відповідні значення y і x в загальний розв'язок, отримаємо $6 = 2C$. Звідси $C = 3$. Отже, функція $y = 3x$ задовольняє як диференціальне рівняння, так і початкову умову, тобто є його частинним розв'язком.

Теорема існування та єдності розв'язку. Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в області, що містить точку $M_0(x_0, y_0)$, то рівняння $y' = f(x, y)$ містить рівняння $y = y(x)$ у якому $y(x_0) = y_0$. Якщо крім того, неперервна й частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y}$, то це рівняння єдине.

Особливістю є те, що в умові теореми немає вимоги наявності похідної $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Ця теорема вперше була сформульована та доведена Коші, тому задачу про знаходження частинного розв'язку за початковими умовами зазвичай називають ***задачею Коші***.

10.2 Диференціальні рівняння першого порядку

10.2.1 Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Визначення 10.6. Диференціальні рівняння, у яких змінні можна розділити шляхом множення обох частин рівняння на один і той самий вираз, називаються диференціальними рівняннями з відокремлюваними змінними.

Таким, наприклад, може бути рівняння

$$f(x)dx = g(y)dy. \quad (10.1)$$

Якщо рівняння має диференціальний вигляд

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0,$$

і може бути записане як добуток

$$f_1(x) \cdot f_2(y)dx + g_1(x) \cdot g_2(y)dy = 0, \quad (10.2)$$

то, поділивши (10.2) на $g_1(x) \cdot f_2(y)$, отримаємо

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx + \frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy = 0.$$

Проінтегруємо і запишемо

$$\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy = C.$$

Приклад 10.2. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $(3x-1)dy + y^2dx = 0$.

Розв’язання. Розділимо змінні

$$(3x-1)dy + y^2dx = 0 \quad |:(3x-1); y^2$$

$$\frac{dy}{y^2} + \frac{dx}{(3x-1)} = 0;$$

$$\frac{dy}{y^2} = -\frac{dx}{(3x-1)}.$$

та проінтегруємо їх:

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{3}\ln(3x-1) + C \qquad \text{або} \qquad \frac{1}{y} = \frac{1}{3}\ln(3x-1) + \frac{1}{3}\ln C.$$

Зауважимо, що довільну змінну можна подати у будь-якому зручному вигляді. Отже,

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{3}\ln[C(3x-1)] \quad \text{або} \quad y = \frac{3}{\ln[C(3x-1)]}.$$

Приклад 10.3. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $y \cdot y' = e^{x+y}$.

Розв’язання. Перепишемо рівняння у вигляді

$$y\frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^y | \cdot dx$$

і розділимо змінні

$$y \cdot dy = e^x \cdot e^y \cdot dx \quad |:e^y$$

$$\frac{y}{e^y} \cdot dy = e^x \cdot dx \quad \text{або} \quad ye^{-y} \cdot dy = e^x \cdot dx;$$

проінтегруємо й отримаємо:

$$\int ye^{-y} \cdot dy = \int e^x \cdot dx;$$

$$-y \cdot e^{-y} - e^{-y} = e^x + C \quad \text{або} \quad e^x + (y+1)e^y + C = 0.$$

10.2.2 Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Визначення 10.7. Диференціальне рівняння першого порядку називається ***однорідним***, якщо його можна подати у вигляді

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{10.3}$$

для деякої функції g. Рівняння

$$y' = f(x, y)$$

називається однорідним, якщо при заміні

$$x \to kx; \quad y \to ky; \quad dx \to kdx; \quad dy \to kdy; \quad y' \to y' \tag{10.4}$$

воно не змінюється.

Однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою ***підстановки***

$$y = u \cdot x; \qquad y' = u' \cdot x + u. \qquad (10.5)$$

Приклад 10.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xy' = y \ln \frac{x}{y}$.

Розв'язання. Перевіримо, чи буде це рівняння однорідним рівнянням першого порядку (10.4). Для цього замінимо

$$x \to kx; \quad y \to ky; \quad y' \to y'.$$

Отримаємо:

$$kxy' = ky \ln \frac{kx}{ky}.$$

Отже, коефіцієнт k скорочується, тому рівняння не змінилося. Звідси робимо висновок, що воно є однорідним рівнянням. Виконаємо підстановку (9.5):

$$y = ux; y' = u'x + u:$$

$$x(u' \cdot x + u) = ux \ln \frac{x}{ux}.$$

Скоротимо та виконаємо необхідні перетворення:

$$u' \cdot x + u = u \ln \frac{1}{u};$$

$$u' \cdot x + u = -u \ln u;$$

$$u' \cdot x = -(1 + \ln u)u;$$

$$x \frac{du}{dx} = -(1 + \ln u)u.$$

Ми отримали рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{du}{u(1+\ln u)} = -\frac{dx}{x}.$$

Проінтегруємо цей вираз, отримаємо

$$\ln(1 + \ln u) = C - \ln x;$$

$$\ln(1 + \ln u) = \ln C - \ln x:$$

$$\ln(1+\ln u) = \ln\frac{C}{x};$$

$$1+\ln u = \frac{C}{x}.$$

Повернемося до початкових змінних. Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння будемо таким:

$$1+\ln\frac{y}{x} = \frac{C}{x}.$$

Приклад 10.5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xy^2dy = (x^3+y^3)dx$.

Розв'язання. Перевіримо, чи буде це рівняння однорідним рівнянням першого порядку (10.4). Для цього замінимо

$$x \to kx; \quad y \to ky; \quad dx \to kdx; \quad dy \to kdy$$

$$kxk^2y^2kdy = (k^3x^3 + k^3y^3)kdx.$$

Скоротивши ліву та праву частину рівняння на k^4, отримаємо початкове рівняння. Отже це диференціальне рівняння – однорідне. Для розв'язання потрібно використати підстановку (10.5), але перед цим розділивши ліву й праву частини на dx і замінивши $\frac{dy}{dx} = y'$:

$$xy^2y' = x^3 + y^3;$$

$$y = ux; y' = u'x + u;$$

$$xu^2x^2(u'x+u) = x^3 + u^3x^3 |:x^3;$$

$$u^2(u'x+u) = 1 + u^3.$$

Отримане рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$u^2u'x = 1 + u^3 - u^3;$$

$$u^2x\frac{du}{dx} = 1 \quad |\cdot dx;$$

$$u^2xdu = dx|:x;$$

$$u^2du = \frac{dx}{x}.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int u^2 du = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{u^3}{3} = \ln x + \ln C.$$

Повернемося до початкових змінних. Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння буде таким:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 = \ln(Cx).$$

10.2.3 Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Визначення 10.8. Диференціальне рівняння першого порядку називається ***лінійним***, якщо воно лінійне відносно шуканої функції та її похідної, тобто має такий вигляд

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{10.6}$$

де $p(x)$ і $q(x)$ – деякі функції змінної x. Якщо функція $q(x)$ тотожно дорівнює нулю, то рівняння (10.6) називається ***однорідним***, в іншому разі – ***неоднорідним***.

Розв'язок лінійного рівняння шукаємо у вигляді

$$y = u \cdot v; \qquad y' = u' \cdot v + u \cdot v' \tag{10.7}$$

Підставимо (10.7) у рівняння (10.6):

$$u' \cdot v + u \cdot v' + p(x) \cdot u \cdot v = q(x);$$

Згрупуємо другий та третій доданок лівої частини рівняння й винесемо u за дужки:

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x).$$

Оберемо в якості v ***будь-який*** частинний розв'язок рівняння

$$v' + p(x)v = 0, \tag{10.8}$$

Щоб визначити u, використаємо рівняння:

$$u'v = q(x). \tag{10.9}$$

Отже, лінійне рівняння першого порядку (10.6) за допомогою підстановки (10.7) зводиться до двох диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними (10.8) та (10.9).

Розв'яжемо лінійне рівняння у загальному випадку. Спочатку знайдемо v з рівняння (10.8):

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v; \qquad \frac{dv}{v} = -p(x)dx;$$

$$\ln v = -\int p(x)dx;$$

$$\boldsymbol{v = e^{-\int p(x)dx}}. \tag{10.10}$$

Під визначеним інтегралом тут маємо на увазі ***будь-яку*** первісну від функції $p(x)$. Визначивши v, із (10.9) знаходимо u:

$$\frac{du}{dx} = \frac{q(x)}{v} = \frac{q(x)}{e^{-\int p(x)dx}} = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx};$$

$$du = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}dx.$$

Звідси

$$u = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}dx + C. \tag{10.11}$$

Отже, загальний розв'язок лінійного рівняння буде таким:

$$y = uv = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}dx + C\right]. \tag{9.12}$$

Приклад 10.6. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння $x^2y' + xy + 1 = 0$, яке задовольняє початковій умові $y(1) = 0$.

Розв'язання. Задане рівняння є лінійним, тому що шукана функція та її похідна входять у рівняння в першій степені. Перепишемо рівняння в зручному вигляді (10.6). Поділивши його на x^2:

$$y' + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}.$$

Визначимо розв'язок за вигляді (9.7):

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = -\frac{1}{x^2};$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}.$$

Прирівняємо вираз у дужках до нуля, і розв'яжемо диференціальне з відокремлюваними змінними відносно v:

$$v' + \frac{v}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln v = -\ln x \quad \Rightarrow \quad \ln v = \ln \frac{1}{x}$$

Отже, функція v має такий вигляд:

$$v = \frac{1}{x}.$$

Повернемося до рівняння. Беручи до уваги, що вираз в дужках дорівнює нулю, отримаємо:

$$u'v = -\frac{1}{x^2}.$$

Підставимо отриману функцію v, розв'яжемо рівняння з відокремлюваними змінними відносно функції u:

$$u' \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad u' = -\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{dx}{x};$$

$$\int du = -\int \frac{dx}{x}.$$

Отже, функція u виглядає так:

$$u = -\ln x + C.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння знаходимо як добуток функцій u і v:

$$y = uv = (C - \ln x) \cdot \frac{1}{x};$$

Знайдемо частинний розв'язок, для чого використаємо початкові умови та визначимо коефіцієнт C:

$$y(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = (C - \ln 1) \cdot \frac{1}{1} \quad \Rightarrow \quad C = 0.$$

Підставимо значення коефіцієнта C у загальний розв'язок, отримаємо такий розв’язок задачі Коші:

$$y = -\frac{\ln x}{x}.$$

10.2.4 Рівняння Бернуллі

До лінійних рівнянь часто приводять рівняння складнішого вигляду. Розглянемо один з найпоширеніших типів.

Визначення 10.9. Диференціальне рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \tag{10.13}$$

називається ***рівнянням Бернуллі***.

При $n = 0$ – це лінійне рівняння (10.6), якщо $n = 1$ – змінні можна розділити (10.1). За будь-яких інших значень n воно зводиться до лінійного шляхом таких дій:

1) ділимо ліву та праву частину рівняння на y^n:
$\frac{y'}{y^n} + \frac{p(x)y}{y^n} = q(x)$або $\quad y' \cdot y^{-n} + p(x)y^{1-n} = q(x)$;
2) вводимо допоміжну функцію $z = y^{1-n}$, звідси
$z' = (1-n)y' \cdot y^{-n}$:
$z' + (1-n)p(x)z = q(x)$.

Отримаємо лінійне рівняння відносно функції z. Замінюючи z на y, отримаємо розв’язок заданого рівняння.

Приклад 10.7. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

Розв’язання. Задане рівняння – це рівняння Бернуллі (10.13) із $n = 3$. Поділимо рівняння на y^3 і введемо нову змінну $z = y^{1-n} = y^{-2}$:

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{2xy}{y^3} = 2x^3 \text{або} \quad y' \cdot y^{-3} + 2xy^{-2} = 2x^3;$$

$$z = y^{-2} \quad \Rightarrow \quad z' = -2y^{-3} \cdot y' \text{або} \quad -\frac{z'}{2} = y' \cdot y^{-3}.$$

Отримаємо лінійне рівняння (10.6):

$$-\frac{z'}{2}+2xz=2x^3 \quad \text{або} \quad z'-4xz=-4x^3.$$

Розв'яжемо його за допомогою підстановки (10.7):

$$z=uv; \quad z'=u'v+uv';$$
$$u'v+uv'-4xuv=-4x^3;$$
$$u'v+u(v'-4xv)=-4x^3.$$

Рівняння розділяється на два рівняння з відокремленими змінними. Знайдемо функцію v:

$$v'-4xv=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx}=4xv \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v}=4xdx;$$

$$\int\frac{dv}{v}=4\int xdx \quad \Rightarrow \quad \ln v=2x^2 \quad \Rightarrow \quad v=e^{2x^2}.$$

Повернемося до рівняння та знайдемо функцію u:

$$u'v=-4x^3\,; \qquad \frac{du}{dx}=-\frac{4x^3}{v}=-\frac{4x^3}{e^{2x^2}}=-4x^3e^{-2x^2}.$$

Проінтегруємо отриманий вираз. Зауважимо, що під час інтегрування необхідно ввести нову змінну та використати метод інтегрування частинами:

$$u=-4\int x^3e^{-2x^2}dx=-4\int x^2\cdot xe^{-2x^2}dx=\begin{bmatrix} t=-2x^2 \\ dt=-4xdx\end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int te^tdt=\begin{bmatrix} u=t & du=dt \\ dv=e^tdt & v=e^t\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}te^t+\frac{1}{2}\int e^tdt=$$

$$=-\frac{1}{2}te^t+\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^t(1-t)+C=\frac{1}{2}e^{-2x^2}(1+2x^2)+C.$$

Отже, проміжна функція z має такий вигляд:

$$z=\left(\frac{1}{2}e^{-2x^2}(1+2x^2)+C\right)\cdot e^{2x^2}=\frac{1}{2}(1+2x^2)+C\cdot e^{2x^2}.$$

Повернемося до шуканої функції, отримаємо загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\frac{1}{y^2}=\frac{1}{2}(1+2x^2)+C\cdot e^{2x^2}.$$

10.2.5 Рівняння у повних диференціалах

Розглянемо рівняння першого порядку, записане в диференціальній формі:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (10.14)$$

Визначення 10.10. Якщо ліва частина рівняння (10.14) є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, то це рівняння називається ***рівнянням в повних диференціалах***.

Вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є повним диференціалом, якщо виконується така умова

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (10.15)$$

Розв'язання рівняння (10.14) зводиться до знаходження такої функції $u(x,y)$, для якої

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Звідси рівняння (10.14) можна переписати у вигляді

$$du(x,y) = 0.$$

Його загальний розв'язок визначається за залежністю:

$$u(x,y) = C,$$

де C - довільна константа.

Ця залежність і є загальним розв'язком рівняння (10.14), тобто інтегрування рівняння (10.14) зводиться до визначення первісної лівої частини рівняння:

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C \qquad (10.16)$$

або

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C. \qquad (10.17)$$

Приклад 10.8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0.$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є задане рівняння рівнянням у повних диференціалах. Для цього випишемо функції P і Q та продиференціюємо їх:

$$P(x,y) = 2x^3 - xy^2; \qquad Q(x,y) = 2y^3 - x^2y;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2xy; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2xy \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Перевірка показала, що рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Проінтегруємо його. Довільною точкою (x_0, y_0) оберемо точку $(0,0)$ (область визначення функції це дозволяє). Використаємо формулу (10.16):

$$\int_0^x (2x^3 - xy^2)dx + \int_0^y 2y^3 dy = C;$$

$$\left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2y^2\right)\Big|_0^x + \frac{1}{2}y^4\Big|_0^y = C \Big| \cdot 2$$

Отримаємо:

$$x^4 - x^2y^2 + y^4 = C.$$

10.3 Диференціальні рівняння вищих порядків. Частинні випадки

Розглянемо диференціальні рівняння

$$y'' = f(x, y, y')$$

або $$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \qquad (10.18)$$

і розглянемо частинні випадки, які легко зводяться до диференціальних рівнянь першого порядку.

10.3.1 Права частина рівняння не містить шуканої функції та її похідної

Рівняння

$$y'' = f(x) \tag{10.19,а}$$

або

$$y^{(n)} = f(x). \tag{10.19,б}$$

- це найпростіші диференціальні рівняння вищих порядків. Їхній загальний інтеграл визначається (у загальному випадку) за допомогою інтегрування n разів. Проілюструємо це на прикладі (10.19,б). Інтегруємо ліву та праву частини рівняння, беручи до уваги, що $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int\left[\int f(x)\,dx\right]dx + C_1x + C_2, \ldots$$

Узагальнюючи, після n-го інтегрування запишемо загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y = \int\left[\int \ldots\left[\int f(x)dx\right]\ldots dx\right]dx + C_1x^n + C_2x^{n-1} + \cdots + C_n.$$

Щоб визначити частинний розв'язок рівняння (10.19), достатньо використати початкові умови.

Приклад 10.9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''' = x + \sin x$.

Розв'язання. Щоб розв'язати рівняння типу (10.19, б) його необхідно тричі проінтегрувати:

$$y'' = \int(x + \sin x)dx = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1;$$

$$y' = \int\left(\frac{x^2}{2} - \cos x + C_1\right)dx = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1x + C_2;$$

$$y = \int\left(\frac{x^3}{6} - \sin x + C_1x + C_2\right)dx = \frac{x^4}{24} + \cos x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

10.3.2 Диференціальні рівняння вищого порядку, що допускають пониження порядку. Рівняння, що не містять шуканої функції (або й перших похідних)

Рівняння виду

$$y'' = f(x, y') \tag{10.20,а}$$

або

$$y^{(n)} = f\left(x, y^{(n-1)}\right) \tag{10.20,б}$$

за допомогою підстановок

$$y' = z, \quad y'' = z' \tag{10.21,а}$$

або

$$y^{(n-1)} = z, \quad y^{(n)} = z' \tag{10.21,б}$$

зводять до диференціальних рівнянь першого порядку відносно нової шуканої функції z.

Знизивши порядок диференціального рівняння, отримаємо диференціальні рівняння першого порядку будь-якого з вивчених типів. Щоб повернутися до початкової функції, проінтегруємо цей вираз ще раз. Розглянемо алгоритм розв’язання на прикладі.

Приклад 10.10. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння$xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

Розв’язання. Маємо диференціальне рівняння другого порядку, що не містить шуканої функції, тобто y (10.20, а). Для розв’язання використаємо підстановку (10.21,а):

$$y' = z, \quad y'' = z';$$

$$xz' = z \ln \frac{z}{x}.$$

Отримаємо диференціальне рівняння першого порядку. З’ясуємо його тип:

$$x \to kx; \quad z \to kz; \quad z' \to z';$$

$$kxz' = kz\ln\frac{kz}{kx}.$$

Отже, рівняння однорідне (10.3). Рішення будемо шукати так (10.5):

$$z = ux; \quad z' = u'x + u;$$

$$x(u'x + u) = ux\ln\frac{ux}{x}; \quad u'x + u = u\ln u;$$

$$u'x = u(\ln u - 1); \quad x\frac{du}{dx} = u(\ln u - 1);$$

$$\int\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int\frac{dx}{x};$$

$$\ln(\ln u - 1) = \ln x + \ln C_1; \quad \ln(\ln u - 1) = \ln(C_1 x);$$

$$\ln u - 1 = C_1 x; \quad \ln u = 1 + C_1 x;$$

$$u = e^{1+C_1 x}, \quad \text{де } u = \frac{z}{x}.$$

Загальний розв’язок диференціального рівняння першого порядку відносно функції z буде таким:

$$z = xe^{1+C_1 x}.$$

Пригадаємо, що $y' = z$, проінтегруємо останній вираз, отримаємо загальний розв’язок диференціального рівняння відносно шуканої функції y:

$$y = \int xe^{1+C_1 x}dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{1+C_1 x} & v = \frac{1}{C_1}e^{1+C_1 x} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{C_1}xe^{1+C_1 x} - \frac{1}{C_1}\int e^{1+C_1 x}dx = \frac{1}{C_1}xe^{1+C_1 x} - \frac{1}{C_1^2}e^{1+C_1 x} + C_2;$$

$$y = \frac{1}{C_1}xe^{1+C_1 x} - \frac{1}{C_1^2}e^{1+C_1 x} + C_2.$$

10.3.3 Диференціальні рівняння вищого порядку, що припускають пониження порядку. Рівняння, що не містять незалежної змінної

Рівняння

$$y'' = f(y, y') \tag{10.22}$$

не містить незалежної змінної. Виконаємо підстановку $y' = p$ і будемо вважати p функцією від y. Продиференціюємо цей вираз, отримаємо $y'' = \frac{dp}{dx}$. Щоб виключити x, виконаємо перетворення:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot y' = \frac{dp}{dy} \cdot p,$$

тобто

$$y'' = p\frac{dp}{dy}.$$

Отже, для пониження порядку диференціального рівняння потрібно використати підстановку:

$$y' = p, \quad y'' = p\frac{dp}{dy}. \tag{10.23}$$

Підставивши (10.23) у рівняння (10.22), отримаємо

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p),$$

тобто рівняння першого порядку відносно функції p. Якщо знайдемо його розв'язок $\big(p = \varphi(y, C_1)\big)$, то шукану функцію отримаємо розв'язавши рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx} = p = \varphi(y, C_1); \text{ тобто } \frac{dy}{\varphi(y,C_1)} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{\varphi(y,C_1)} = \int dx.$$

Приклад 10.11. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $2y'' = 3y^2$, що задовольняє такі умови $y(-2) = 1,\ y'(-2) = -1$.

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння другого порядку, що не містить незалежної змінної (10.22). Для пониження порядку скористаємося підстановкою (10.23):

$$y' = p, \quad y'' = p\frac{dp}{dy}.$$

Рівняння матиме такий вигляд:

$$2p\frac{dp}{dy} = 3y^2.$$

Це рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$2pdp = 3y^2dy \quad \Rightarrow \quad 2\int pdp = 3\int y^2dy \quad \Rightarrow \quad p^2 = y^3 + C_1.$$

Знайдемо константу C_1 з початкової умови, підставимо замість y 1, а замість $p = y' - 1$:

$$(-1)^2 = 1^3 + C_1; \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

Повернемося до шуканої функції:

$$p^2 = y^3; \quad p = \sqrt{y^3}; \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{y^3};$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y^3}} = dx; \quad \int\frac{dy}{\sqrt{y^3}} = \int dx; \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{\sqrt{y}} = x + C_2.$$

Знайдемо константу C_2 з умови$y(-2) = 1$

$$\frac{2}{1} = -2 + C_2; \quad \Rightarrow \quad C_2 = 4$$

Отже, частинний розв'язок диференціального рівняння має такий вигляд:

$$-\frac{2}{\sqrt{y}} = x + 4 \text{або} \quad y = \frac{4}{(x+4)^2}.$$

10.4 Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків із сталими коефіцієнтами

Визначення 10.11. Лінійним диференціальним рівнянням вищого порядку називається рівняння першої степені (лінійне) відносно невідомої функції та її похідних.

Лінійне диференціальне рівняння n-го порядку має такий вигляд:

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \qquad (10.24)$$

Функція $f(x)$ називається ***правою частиною*** рівняння. Якщо $f(x)$ тотожно дорівнює нулю, рівняння називається ***однорідним***, в іншому разі – ***неоднорідним***. Коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ - сталі числа.

Надалі будемо розглядати диференціальні рівняння другого порядку. Усі висновки можна буде застосувати щодо рівнянь будь-якого порядку.

10.4.1 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (ЛОДР)

Розглянемо лінійне однорідне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0. \qquad (10.25)$$

Визначення 10.12. Загальним розв'язком рівняння (10.25) є функція $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, яка залежить від двох довільних сталих C_1, C_2 і перетворює рівняння на тотожність за будь-яких значень цих сталих.

Розв'язок лінійного однорідного рівняння будемо шукати у вигляді

$$y = e^{kx}. \qquad (10.26)$$

Підставимо

$$y = e^{kx}, \quad y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx}$$

у рівняння (10.25), отримаємо

$$a_2k^2e^{kx} + a_1ke^{kx} + a_0e^{kx} = 0$$

або

$$(a_2k^2 + a_1k + a_0)e^{kx} = 0.$$

Зрозуміло, що $e^{kx} \neq 0$, тому

$$a_2k^2 + a_1k + a_0 = 0. \tag{10.27}$$

Рівняння (10.27) називається ***характеристичним рівнянням***.

Будь-яка функція e^{k_ix} , де k_i - корінь характеристичного рівняння є розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами.

Існують три можливих випадки для коренів k_1 і k_2 характеристичного рівняння:

1) k_1 і k_2- дійсні та різні числа $k_1 \neq k_2$;
2) k_1 і k_2- дійсні та рівні числа $k_1 = k_2$ (кратні корені);
3) k_1 і k_2- комплексні спряжені корені $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$.

Розглянемо кожний з цих випадків окремо.

1. ***Корені характеристичного рівняння дійсні та різні:*** $\boldsymbol{k_1 \neq k_2}$.

Обидва корені можуть бути показниками k функції e^{kx}, тому ми одразу отримаємо два розв'язки (10.25): e^{k_1x} та e^{k_2x}. Зрозуміло, що їх співвідношення не є сталою величиною: $\frac{e^{k_1x}}{e^{k_2x}} = e^{(k_1-k_2)x}$. Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння у разі наявності дійсних і різних коренів виглядає так:

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}, \tag{10.28}$$

де C_1 і C_2- довільні сталі.

Приклад 10.12. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння $y'' + y' - 2y = 0$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння, що відповідає ЛОДР. Для цього виконаємо заміну:

$$y \to 1; \quad y' \to k; \quad y'' \to k^2;$$

$$k^2 + k - 2 = 0,$$

його корені $k_1 = 1$; $k_2 = -2$. Застосувавши формулу (10.28) отримаємо загальний розв'язок ЛОДР:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

2. ***Корені характеристичного рівняння дійсні та рівні:*** $\boldsymbol{k_1 = k_2}$**.**

У такому разі ми отримаємо тільки один розв'язок: $y_1 = e^{k_1 x}$. Доведемо, що як другий розв'язок можна використати функцію

$$y_2 = xe^{k_1 x}.$$

Продиференціюємо функцію y_2 двічі:

$$y_2' = e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x};$$

$$y_2'' = 2k_1 e^{k_1 x} + k_1^2 x e^{k_1 x}.$$

Підставимо отримані вирази у рівняння (10.25):

$$a_2\left(2k_1 e^{k_1 x} + k_1^2 x e^{k_1 x}\right) + a_1\left(e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x}\right) + a_0 x e^{k_1 x} = 0;$$

$$e^{k_1 x}[x(a_2 k_1^2 + a_1 k_1 + a_0) + (2a_2 k_1 + a_1)] = 0.$$

Оскільки, k_1 - корінь характеристичного рівняння, то $a_2 k_1^2 + a_1 k_1 + a_0 = 0$; а k_1 – двократний корінь, то за теоремою Вієта маємо: $k_1 + k_2 = -\frac{a_1}{a_2}$, тобто $2k_1 = -\frac{a_1}{a_2}$. Отже, вираз у квадратних дужках дорівнює нулю, а тому функція $y_2 = xe^{k_1 x}$ дійсно є розв'язком рівняння (10.25). Таким чином, загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння у випадку дійсних та рівних коренів буде виглядати так:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{kx} \tag{10.29}$$

Приклад 10.13. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння, що відповідає ЛОДР. Для цього використаємо заміну:

$$y \to 1; \quad y' \to k; \quad y'' \to k^2;$$

$$k^2 + 4k + 4 = 0,$$

його корені $k_1 = k_2 = -2$. За формулою (10.29) отримаємо загальний розв'язок ЛОДР:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}.$$

3. ***Корені характеристичного рівняння – комплексні числа $\boldsymbol{k_{1,2} = \alpha \pm \beta i}$.***

Якщо розв'язком характеристичного рівняння (10.27) будуть комплексні числа, то, як і раніше отримаємо дів розв'язки рівняння (10.25): $e^{(\alpha+\beta i)x}$і$e^{(\alpha-\beta i)x}$, до того ж їх співвідношення $e^{2i\beta x}$ не є сталою величиною. Розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння можна записати у такому вигляді:

$$C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x}.$$

Перевіримо, чи цей розв'язок дійсно є розв'язком рівняння (10.25). Для цього застосуємо правило: якщо рівняння (10.27) з дійсними коефіцієнтами має комплексний розв'язок $y = u(x) + iv(x)$, то кожна з функцій $u(x)$ і $v(x)$ є розв'язком цього рівняння. Продиференцюємо функцію y і підставимо результат у рівняння (10.25), отримаємо

$$a_2(u'' + iv'') + a_1(u' + iv') + a_2(u + iv) = 0,$$

Перегрупуємо доданки

$$(a_2 u'' + a_1 u' + a_0 u) + i(a_2 v'' + a_1 v' + a_0 v) = 0.$$

Оскільки комплексне число дорівнює нулю тільки тоді, коли дорівнюють нулю його дійсна й уявна частини, то повинні виконуватися умови

$$a_2u'' + a_1u' + a_0u = 0 \text{ і } a_2v'' + a_1v' + a_0v = 0,$$

а з цього прямує, що функції $u(x)$ і $v(x)$ є розв'язками рівняння (10.25).

Оскільки за формулою Ейлера (7.11) отримаємо

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) =$$

$$= e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$

то за вказаним правилом функції $e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $e^{\alpha x}\sin\beta x$ є розв'язком рівняння (10.25), а отже, їхнє співвідношення не є сталою величиною. Маючи обидва частинні розв'язки, побудуємо загальне рішення:

$$y = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x),$$

де C_1 іC_2 – дійсні сталі.

Другий розв'язок у комплексні формі $e^{(\alpha-\beta i)x}$ нам навіть не знадобився. Будуючи загальний розв'язок за його дійсною та уявною частинами, ми отримаємо той самий результат.

Отже, за наявності комплексних коренів характеристичного рівняння загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння (10.25) буде мати такий вигляд:

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x). \qquad (10.30)$$

Зауваження. Якщо дійсна частина комплексного числа дорівнює нулю ($\alpha = 0$), загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння (10.25) виглядає так:

$$y = C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x. \qquad (10.31)$$

Приклад 10.14. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння, що відповідає ЛОДР. Для цього застосуємо таку заміну:

$$y \to 1; \quad y' \to k; \quad y'' \to k^2;$$

$$k^2 + 2k + 5 = 0,$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16; \quad \sqrt{D} = 4i;$$

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

його корені $k_{1,2} = -1 \pm 2i$, де $\alpha = -1$, $\beta = 2$. Застосувавши формулу (10.30), отримаємо загальний розв'язок ЛОДР:

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

*Приклад 10.15.*Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння $y'' + 16y = 0$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння, що відповідає ЛОДР. Для цього виконаємо заміну:

$$y \to 1; \quad y'' \to k^2;$$

$$k^2 + 16 = 0; \quad \Rightarrow \quad k^2 = -16; \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \pm 4i.$$

Застосувавши формулу (10.31) отримаємо загальний розв'язок ЛОДР:

$$y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x.$$

Щоб результати зазначених досліджень було зручно використовувати надалі, зведемо їх у таблицю 10.1.

Таблиця 10.1 - Загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами

Дискримінант характеристичного рівняння	Корені характеристичного рівняння	Загальний розв'язок ЛОДР
$D>0$	$k_1 \neq 0;\ k_2 \neq 0$	$y_o = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
	$k_1 = -k_2 = k$	$y_o = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}$
	$k_1 = 0;\ k_2 \neq 0$	$y_o = C_1 + C_2 e^{k_2 x}$
$D=0$	$k_1 = k_2 = k$	$y_o = (C_1 + C_2 x) e^{kx}$
$D<0$	$k_{1,2} = \pm\beta i$	$y_o = C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x$
	$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y_o = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

10.4.2 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (ЛНДР)

Нехай дано лінійне диференціальне рівняння другого порядку, з правою частиною – лінійне неоднорідне диференціальне рівняння (ЛНДР):

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x). \qquad (10.32)$$

Визначення 10.13. Рівняння без правої частини $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$, яке отримаємо (10.32) шляхом заміни$f(x) = 0$, називається ***однорідним рівнянням відповідним заданому.***

Доведемо ***теорему про структуру загального розв'язку*** лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

Теорема. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (10.32) можна подати як суму загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та будь-якого частинного розв'язку цього рівняння.

Доведення. Позначимо $\Phi(x)$ - загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а $\varphi(x)$ - будь-який частинний розв'язок неоднорідного. Розглянемо функцію

$$y = \Phi(x) + \varphi(x). \qquad (10.33)$$

Двічі про диференціювавши її, отримаємо

$$y' = \Phi'(x) + \varphi'(x); \qquad y'' = \Phi''(x) + \varphi''(x).$$

Підставимо вирази для y, y', y'' в ліву частину рівняння (10.32), обчислимо

$$a_2\big(\Phi''(x) + \varphi''(x)\big) + a_1\big(\Phi'(x) + \varphi'(x)\big) + a_0\big(\Phi(x) + \varphi(x)\big) =$$

$$\big[a_2\Phi''^{(x)} + a_1\Phi'(x) + a_0\Phi(x)\big] + \big[a_2\varphi''^{(x)} + a_1\varphi'(x) + a_0\varphi(x)\big].$$

Вираз у першій із квадратних дужок дорівнює нулю, оскільки $\Phi(x)$ - розв'язок відповідного однорідного рівняння; вираз в других квадратних дужках дорівнює $f(x)$, тому що - розв'язок неоднорідного рівняння. Отже, функція (10.33) дійсно є розв'язком рівняння (10.32).

Таким чином, щоб знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння, необхідно знайти загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння та будь-який частинний розв'язок неоднорідного.

Оскільки загальний розв'язок неоднорідного рівняння знаходити вже навчилися, залишається навчитися знаходити частинний розв'язок неоднорідного. Розглянемо деякі випадки, коли розв'язок отримують за допомогою методу невизначених коефіцієнтів. Будемо розглядати тільки диференціальні рівняння з правими частинами визначеного виду. Умовно поділимо їх на три типи.

1. Права частина рівняння (10.32) має вигляд

$$\boldsymbol{f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}}, \tag{10.34}$$

де $P_n(x)$ - многочлен. У такому разі частинний розв'язок рівняння (10.32) буде виглядати так:

$$\boldsymbol{y_{ч} = x^p Q_n(x) e^{\alpha x}}, \tag{10.35}$$

де $Q_n(x)$ - многочлен того самого ступеня, що й $P_n(x)$; якщо число α не є коренем характеристичного рівняння (10.27), то $p = 0$, а якщо є, то p дорівнює кратності цього кореня.

2. Права частина рівняння (10.32) має вигляд

$$\boldsymbol{f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x}. \tag{10.36}$$

Якщо числа $\pm\beta i$ не є коренями характеристичного рівняння, то частинний розв'язок виглядає так:

$$\boldsymbol{y_{\text{н}} = \tilde{A}\cos\beta x + \tilde{B}\sin\beta x}. \tag{10.37}$$

Якщо числа $\pm\beta i$ є коренями характеристичного рівняння, то частинний розв'язок виглядає так:

$$\boldsymbol{y_{\text{н}} = x\left(\tilde{A}\cos\beta x + \tilde{B}\sin\beta x\right)}. \tag{10.38}$$

У частинних випадках, коли коефіцієнти $A = 0$ або $B = 0$, розв'язок потрібно шукати у повному вигляді.

3. Права частина рівняння (10.32) має вигляд

$$\boldsymbol{f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]}, \tag{10.39}$$

де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – многочлени, а числа $\alpha \pm \beta i$ не є коренями характеристичного рівняння, то частинний розв'язок потрібно шукати у вигляді

$$\boldsymbol{y = e^{\alpha x}\left[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x\right]}, \tag{10.40}$$

де$\tilde{P}_k(x)$ і $\tilde{Q}_k(x)$- многочлени максимальної степені з многочленів $P_n(x)$ і $Q_m(x)\left(k = max(n, m)\right)$.

Якщо числа $\alpha \pm \beta i$ є коренями характеристичного рівняння, то частинний розв'язок (10.40) потрібно помножити на x.

Усі розглянуті випадки правих частин деталізовано в таблиці 10.2.

Таблиця 10.2 - Частинний розв’язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами

Різновид правої частини $f(x)$	Перевірка відповідності коренів характеристичного рівняння кореням правої частини	Різновид частинного розв’язку неоднорідного рівняння $y_{\text{н}}$
$Ae^{\alpha x}$	$k_1 \neq \alpha;\ k_2 \neq \alpha$	$\tilde{A}e^{\alpha x}$
	$k_1 = \alpha;\ k_2 \neq \alpha$	$\tilde{A}e^{\alpha x} \cdot x$
	$k_1 = k_2 = \alpha$	$\tilde{A}e^{\alpha x} \cdot x^2$
$P_n(x)$	$k_1 \neq 0;\ k_2 \neq 0$	$\tilde{P}_n(x)$
	$k_1 = 0;\ k_2 \neq 0$	$\tilde{P}_n(x) \cdot x$
$P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$	$k_1 \neq \alpha;\ k_2 \neq \alpha$	$\tilde{P}_n(x) \cdot e^{\alpha x}$
	$k_1 = \alpha;\ k_2 \neq \alpha$	$\tilde{P}_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot x$
	$k_1 = k_2 = \alpha$	$\tilde{P}_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot x^2$
$A\cos\beta x + B\sin\beta x$	$k_{1,2} \neq \pm\beta i$	$\tilde{A}\cos\beta x + \tilde{B}\sin\beta x$
	$k_{1,2} = \pm\beta i$	$\left(\tilde{A}\cos\beta x + \tilde{B}\sin\beta x\right)x$
$e^{\alpha x}[A\cos\beta x +$ $+B\sin\beta x]$	$k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}\left[\tilde{A}\cos\beta x + \tilde{B}\sin\beta x\right]$
	$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}\left[\tilde{A}\cos\beta x + \tilde{B}\sin\beta x\right]x$
$e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x +$ $+Q_m(x)\sin\beta x]$	$k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x +$ $+\tilde{Q}_k(x)\sin\beta x]$
	$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x +$ $+\tilde{Q}_k(x)\sin\beta x]x$

Проілюструємо на прикладах, як потрібно використовувати наведену таблицю під час розв’язання диференціальних рівнянь.

Приклад 10.16. Знайти загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}.$$

Розв’язання. Відповідно до теореми про структуру загального розв’язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, визначати його будемо у вигляді:

$$y = y_{\text{о}} + y_{\text{н}}.$$

Запишемо однорідне рівняння, що відповідає зазначеному:

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Його характеристичне рівняння буде мати такий вигляд:

$$k^2 - 3k + 2 = 0,$$

де $k_1 = 1$; $k_2 = 2$ - корені характеристичного рівняння.

Отже загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y_{\text{о}} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Відповідно до таблиці 10.2, за виглядом правої частини визначимо структуру частинного розв'язку:

$$y_{\text{н}} = Ae^{-x}$$

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів знайдемо значення невідомого коефіцієнта. Для цього знайдемо першу та другу похідні й підставимо їх у початкове рівняння, порівняємо коефіцієнти при однакових функціях:

$$y_{\text{н}}' = -Ae^{-x};\ y_{\text{н}}'' = Ae^{-x}; \qquad \Rightarrow$$

$$Ae^{-x} - 3(-Ae^{-x}) + 2Ae^{-x} = 10e^{-x};$$

$$6Ae^{-x} = 10e^{-x}; \quad \Rightarrow \quad 6A = 10; \qquad A = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

Отримаємо частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:$y_{\text{н}} = \frac{5}{3}e^{-x}$.

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння буде мати такий вигляд:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{5}{3}e^{-x}.$$

Приклад 10.17. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$y'' + 6y' + 9y = 2e^{-3x}.$$

Розв'язання. Відповідно до теореми про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, визначати його будемо у вигляді:

$$y = y_{о} + y_{н}.$$

Запишемо відповідне даному однорідне рівняння:

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

Його характеристичне рівняння має такий вигляд:

$$k^2 + 6k + 9 = 0$$

де $k_{1,2} = -3$- корені характеристичного рівняння.

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y_{о} = e^{-3x}(C_1 + C_2 x)$$

Відповідно до таблиці 10.2, за виглядом правої частини визначимо структуру частинного розв'язку. Корені характеристичного рівняння співпадають із коренями правої частини (кратність дорівнює двом), тому помножимо частинний розв'язок на x^2:

$$y_{н} = Ae^{-3x} \cdot x^2.$$

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів знайдемо значення невідомого коефіцієнта. Для цього знайдемо першу та другу похідні й підставимо їх у початкове рівняння, порівняємо коефіцієнти при однакових функціях:

$$y_{н}' = -3Ae^{-3x} \cdot x^2 + Ae^{-3x} \cdot 2x = Ae^{-3x}(-3x^2 + 2x);$$

$$y_{н}'' = -3Ae^{-3x}(-3x^2 + 2x) + Ae^{-3x}(-6x + 2) =$$

$$= Ae^{-3x}(9x^2 - 12x + 2); \qquad \Rightarrow$$

$$Ae^{-3x}(9x^2 - 12x + 2) + 6Ae^{-3x}(-3x^2 + 2x) + 9Ae^{-3x}x^2 =$$

$$= 2e^{-3x};$$

$$Ae^{-3x}(9x^2 - 12x + 2 - 18x^2 + 12x + 9x^2) = 2e^{-3x};$$

$$2A = 2; \qquad \Rightarrow \qquad A = 1$$

Отримаємо маємо частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння: $y_{н} = e^{-3x} \cdot x^2$

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння буде мати такий вигляд:

$$y = e^{-3x}(C_1 + C_2 x) + e^{-3x} \cdot x^2.$$

Приклад 10.18. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$y'' + y = 2x^3 - x + 2.$$

Розв'язання. За теоремою про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, шукати його будемо у вигляді:

$$y = y_{о} + y_{н}.$$

Запишемо відповідне однорідне рівняння:

$$y'' + y = 0.$$

Його характеристичне рівняння буде таким:

$$k^2 + 1 = 0,$$

де $k_{1,2} = \pm i$ - корені характеристичного рівняння.

Отже загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y_{о} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Відповідно до таблиці 10.2, за виглядом правої частини визначимо структуру частинного розв'язку:

$$y_{н} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів знайдемо значення невідомого коефіцієнта. Для цього знайдемо першу та другу похідні й підставимо їх у початкове рівняння:

$$y_{н}' = 3Ax^2 + 2Bx + C; \qquad y_{н}'' = 6Ax + 2B; \qquad \Rightarrow$$

$$6Ax + 2B + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 2x^3 - x + 2.$$

Оскільки це степеневі функції, прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ліворуч та праворуч:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A = 3 \\ x^2 & B = 0 \\ x^1 & 6A + C = -1; \quad C = -1 - 6A = -1 - 18 = -19 \\ x^0 & 2B + D = 2; \quad D = 2 - 2B = 2 - 0 = 2 \end{array}$$

Отримаємо частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$y_{\text{н}} = 2x^3 - 19x + 2.$$

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння буде мати такий вигляд:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x^3 - 19x + 2.$$

Приклад 10.19. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$y'' + y' - 6y = 10xe^{2x}.$$

Розв'язання. Відповідно до теореми про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, шукати його будемо у вигляді:

$$y = y_{\text{о}} + y_{\text{н}}.$$

Запишемо відповідне однорідне рівняння:

$$y'' + y' - 6y = 0.$$

Його характеристичне рівняння буде мати такий вигляд:

$$k^2 + k - 6 = 0.$$

де $k_1 = -3$; $k_2 = 2$ - корені характеристичного рівняння, отже загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y_{\text{о}} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}.$$

Відповідно до таблиці 10.2 за виглядом правої частини визначимо структуру частинного розв'язку. Один з коренів характеристичного рівняння співпадає з коренем правої частини, тому помножимо частинний розв'язок на x:

$$y_{\text{н}} = (Ax + B) \cdot e^{2x} \cdot x = (Ax^2 + Bx)e^{2x}.$$

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів знайдемо значення невідомого коефіцієнта. Для цього знайдемо першу та другу похідні й підставимо їх у початкове рівняння:

$$y_{\text{н}}' = (2Ax + B)e^{2x} + (Ax^2 + Bx) \cdot 2e^{2x} =$$

$$= (2Ax^2 + 2Bx + 2Ax + B)e^{2x};$$

$$y_{\text{н}}'' = (4Ax + 2B + 2A)e^{2x} + (2Ax^2 + 2Bx + 2Ax + B) \cdot 2e^{2x} =$$

$$= (4Ax^2 + 4Bx + 8Ax + 4B + 2A)e^{2x};$$

$$(4Ax^2 + 4Bx + 8Ax + 4B + 2A)e^{2x} +$$

$$+(2Ax^2 + 2Bx + 2Ax + B)e^{2x} - 6(Ax^2 + Bx)e^{2x} = 10xe^{2x};$$

$$(10Ax - 6Bx + 2A + 5B)e^{2x} = 10xe^{2x}.$$

Тут маємо степеневі функції, отже дорівняємо коефіцієнти при однакових степенях ліворуч та праворуч:

$$\begin{array}{c|c} x^1 & 10A - 6B = 10 \\ x^0 & 2A + 5B = 0 \end{array}.$$

Розв'яжемо цю систему, наприклад, методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 25 + 6 = 31; \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 25; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -10;$$

$$A = \frac{25}{31}; \quad B = -\frac{10}{31}.$$

Отримаємо маємо частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$y_{\text{н}} = \left(\frac{25}{31}x - \frac{10}{31}\right)e^{2x}.$$

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння буде таким:

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + \left(\frac{25}{31}x - \frac{10}{31}\right)e^{2x}$$

Приклад 10.20. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y'' - 5y' = 3x - 2$.

Розв'язання. Відповідно до теореми про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, шукати його будемо у вигляді:

$$y = y_{\text{о}} + y_{\text{н}}.$$

Запишемо відповідне однорідне рівняння:

$$y'' - 5y' = 0.$$

Його характеристичне рівняння має вигляд:

$$k^2 - 5k = 0,$$

де $k_1 = 0$; $k_2 = 5$ - корені характеристичного рівняння, отже загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y_{\text{о}} = C_1 + C_2 e^{5x}.$$

Відповідно до таблиці 10.2, за виглядом правої частини визначимо структуру частинного розв'язку. Звертаємо увагу на те, що один з коренів характеристичного рівняння дорівнює нулю, тому помножимо частинний розв'язок на x:

$$y_{\text{н}} = (Ax + B) \cdot x = Ax^2 + Bx.$$

За допомогою метода невизначених коефіцієнтів знайдемо значення невідомого коефіцієнта. Для цього знайдемо першу та другу похідні й підставимо в початкове рівняння:

$$y'_{\text{н}} = 2Ax + B; \quad y''_{\text{н}} = 2A;$$

$$2A - 5(2Ax + B) = 3x - 2;$$

$$2A - 10Ax - 5B = 3x - 2.$$

$$\begin{array}{c|l} x^1 & -10A = 3 \\ x^0 & 2A - 5B = -2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A = -\dfrac{3}{10} \\ B = \dfrac{7}{25} \end{array}$$

Отримаємо частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$y_{\text{н}} = -\frac{3}{10}x^2 + \frac{7}{25}x.$$

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння буде мати такий вигляд:

$$y = C_1 + C_2 e^{5x} - \frac{3}{10}x^2 + \frac{7}{25}x.$$

Приклад 10.21. Знайти частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y'' + 9y = -5\sin 2x$, яке задовольняє початковим умовам $y(\pi) = y'(\pi) = 1$.

Розв'язання. Відповідно до теореми про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, шукати його будемо у вигляді:

$$y = y_{\text{о}} + y_{\text{н}}.$$

Запишемо відповідне однорідне рівняння:

$$y'' + 9y = 0.$$

Його характеристичне рівняння має вигляд:

$$k^2 + 9 = 0,$$

де $k_{1,2} = \pm 3i$ - корені характеристичного рівняння, отже загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y_{\text{о}} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Відповідно до таблиці 10.2, за виглядом правої частини визначимо структуру частинного розв'язку. Звертаємо увагу на те, що корені характеристичного рівняння не дорівнюють кореням правої частини $\pm 3i \neq \pm 2i$:

$$y_{\text{н}} = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів знайдемо значення невідомого коефіцієнта. Для цього знайдемо першу та другу похідні й підставимо їх у початкове рівняння:

$$y_{\text{н}}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x\,; \quad y_{\text{н}}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x;$$

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 9(A\cos 2x + B\sin 2x) = -5\sin 2x;$$

$$5A\cos 2x + 5B\sin 2x = -\sin 2x$$

$$\begin{array}{c|l} \cos 2x & 5A = 0 \\ \sin 2x & 5B = -5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 0 \\ B = -1 \end{array}$$

Отримаємо частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$y_{\text{н}} = -\sin 2x.$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння має вигляд:

$$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x - \sin 2x$$

Для знаходження частинного розв'язку, треба задовольнити початковим умовам, для цього знайдемо похідну:

$$y' = -3C_1\sin 3x + 3C_2\cos 3x - 2\cos 2x$$

$$\begin{array}{r|l} y(\pi) = 1 & -C_1 = 1 \\ y'(\pi) = 1 & 3C_2 - 2 = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 = -1 \\ C_2 = 1 \end{array}.$$

Отже, частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння має такий вигляд:

$$y = \cos 3x - \sin 3x - \sin 2x.$$

Приклад 10.22. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$y'' + 5y' + 4y = 22x \cdot e^{-x} \cdot \cos x$$

Розв'язання. За теоремою про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, шукати його будемо у вигляді:

$$y = y_{\text{о}} + y_{\text{н}}.$$

Запишемо відповідне однорідне рівняння:

$$y'' + 5y' + 4y = 0.$$

Його характеристичне рівняння буде таким:

$$k^2 + 5k + 4 = 0$$

де $k_1 = -1$; $k_2 = -4$ - корені характеристичного рівняння.

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y_о = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}.$$

Відповідно до таблиці 10.2, за виглядом правої частини визначимо структуру частинного розв'язку:

$$y_н = e^{-x}[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x]$$

Методом невизначених коефіцієнтів знайдемо значення невідомого коефіцієнта. Для цього знайдемо першу та другу похідні. Зауважимо, що ця процедура потребує великої уважності:

$$y_н' = -e^{-x}[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x] +$$

$$+e^{-x}[A\cos x - (Ax + B)\sin x + C\sin x + (Cx + D)\cos x] =$$

$$= e^{-x}[(-Ax - B + A + Cx + D)\cos x +$$

$$+(-Cx - D - Ax - B + C)\sin x];$$

$$y_н'' = -e^{-x}[(-Ax - B + A + Cx + D)\cos x +$$

$$+(-Cx - D - Ax - B + C)\sin x] + e^{-x}[(-A + C)\cos x -$$

$$-(-Ax - B + A + Cx + D)\sin x + (-C - A)\sin x +$$

$$+(-Cx - D - Ax - B + C)\cos x] =$$

$$= e^{-x}[(-2A - 2Cx - 2D + 2C)\cos x +$$

$$+(-2Ax + 2B - 2C - 2A)\sin x].$$

Підставимо отримані вирази в початкове рівняння:

$$e^{-x}[(-2A - 2Cx - 2D + 2C)\cos x +$$

$$+(-2Ax + 2B - 2C - 2A)\sin x] +$$

$$+5e^{-x}[(-Ax - B + A + Cx + D)\cos x +$$

$$+(-Cx - D - Ax - B + C)\sin x] +$$

$$+4e^{-x}[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x] = 22x \cdot e^{-x} \cdot \cos x.$$

Виконаємо необхідні перетворення:

$$e^{-x}[(-Ax + 3Cx + 3A - B - 2C + 3D)\cos x +$$

$$+(-7Ax - Cx - 2A - 3B + 3C - D)\sin x] = 22x \cdot e^{-x} \cdot \cos x.$$

Порівняємо коефіцієнти при однакових функціях

$$\begin{array}{r|c} x\cos x & -A + 3C = 22 \\ x\sin x & -7A - C = 0 \\ \cos x & 3A - B - 2C + 3D = 0 \\ \sin x & -2A - 3B + 3C - D = 0 \end{array}$$

З другого рівняння виразимо $C = -7A$. Підставимо у перше рівняння: $-A + 3 \cdot (-7A) = 22$, звідси $A = -1; C = 7$. Підставимо отримані значення у третє та четверте рівняння, отримаємо систему з двох рівнянь з двома невідомими, яку розв'яжемо за правилами Крамера:

$$\begin{cases} -2C + 3D = 10 \\ 3C - D = 19 \end{cases};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7; \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 19 & -1 \end{vmatrix} = -67; \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 10 \\ 3 & 19 \end{vmatrix} = -68.$$

$$\Rightarrow \qquad C = \frac{67}{7}; \quad D = \frac{68}{7}.$$

Отримаємо частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$y_{\text{н}} = e^{-x}\left[(x + 7)\cos x + \left(\frac{67}{7}x + \frac{68}{7}\right)\sin x\right].$$

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння буде виглядати так:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x} + e^{-x}\left[(x + 7)\cos x + \left(\frac{67}{7}x + \frac{68}{7}\right)\sin x\right].$$

10.5 Системи диференціальних рівнянь

Визначення 10.14. Системою диференціальних рівнянь називається сукупність рівнянь, до кожного з яких входять незалежна змінна, шукані функції та їхні похідні.

Будемо вважати, що кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих функцій, наприклад:

$$\begin{cases} x' = 2x + y + t + 5 \\ y' = 4x - 5y + 2t \end{cases}.$$

Визначення 10.15. Розв'язком системи диференціальних рівнянь називається сукупність функцій

$$x_1 = x_1(t), \qquad x_2 = x_2(t), \quad \dots \quad , x_n = x_n(t)$$

яка при підстановці в кожне з рівнянь перетворює його у тотожність.

Надалі будемо розглядати не будь-які системи диференціальних рівнянь, а системи певного різновиду.

Визначення 10.16. Нормальною системою диференціальних рівнянь називається система виду

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}. \tag{10.41}$$

Наприклад, нормальною можна вважати систему, наведену як приклад. Важливо, що в багатьох випадках правильно задану систему диференціальних рівнянь можна звести до нормальної. Так, наприклад, система

$$\begin{cases} x' + 2y' - 3x = 0 \\ x' + 3y' + 5y = 2t \end{cases}$$

зводиться до нормальної, якщо ці рівняння розв'язати відносно x' та y':

$$\begin{cases} x' = 9x + 2y - 4t \\ y' = -3x - y + 2t \end{cases}.$$

Систему

$$\begin{cases} x' + y' - tx = 0 \\ x' + y' + y = 0 \end{cases}$$

не можна розв'язати відносно x' і y', тому її не можна подати як нормальну. Такі системи не будуть розглядатися в цьому курсі.

Нормальна система рівнянь може бути замінена одним диференціальним рівнянням, порядок якого дорівнює кількості рівнянь системи.

З усіх нормальних систем оберемо тільки системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Визначення 10.17. Однорідна система вигляду

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y \\ y' = a_2x + b_2y, \end{cases} \tag{10.42}$$

де a_i, b_i - сталі коефіцієнти, називається системою лінійних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

10.5.1 Розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь за допомогою метода вилучення змінної

Для розв'язання таких систем, як (10.42), найпростіше застосувати метод вилучення невідомих. Його сутність полягає в наступному. Якщо продиференціювати, наприклад, перше з рівнянь системи (10.42)

$$x'' = a_1x' + b_1y',$$

і підставити в це рівняння значення похідної y' з другого рівняння, отримаємо

$$x'' = a_1x' + b_1(a_2x + b_2y).$$

Виразимо з першого рівняння $y = \frac{1}{b_1}(x' - a_1 x)$ та підставимо в отримане

$$x'' = a_1 x' + b_1 a_2 x + b_2(x' - a_1 x);$$

$$x'' - (a_1 + b_2)x' - (a_2 b_1 + a_1 b_2)x = 0.$$

Розв'язування таких однорідних диференціальних рівнянь за допомогою характеристичних рівнянь було розглянуто у п. 10.4.1. Записавши розв'язок однорідного рівняння (див. табл. 10.1) для шуканої функції x за допомогою перехідної формули $y = \frac{1}{b_1}(x' - a_1 x)$, отримаємо розв'язок однорідного рівняння для шуканої функції y.

Проілюструємо використання наведеного алгоритму на прикладі.

Приклад 10.23. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$$

Розв'язання. Продиференціюємо перше рівняння:

$$x'' = 2x' + y' \;.$$

Підставимо в отримане рівняння y' з другого рівняння

$$x'' = 2x' + 3x + 4y.$$

Виразимо взяте з першого рівняння $y = x' - 2x$ і підставимо в останнє:

$$x'' = 2x' + 3x + 4(x' - 2x);$$

$$x'' - 6x' + 5x = 0.$$

Отримали лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку. Запишемо характеристичне рівняння, йому відповідне:

$$k^2 - 6k + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 1;\; k_2 = 5.$$

За таблицею 10.1 отримаємо загальний розв'язок для шуканої функції x:

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}.$$

Знайдемо функцію y. Для цього про диференціюємо x:

$$x' = C_1 e^t + 5C_2 e^{5t};$$

$$y = x' - 2x = C_1 e^t + 5C_2 e^{5t} - 2(C_1 e^t + C_2 e^{5t});$$

$$y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}.$$

Отримаємо загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь:

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}; \quad y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}.$$

10.5.2 Розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь за допомогою характеристичного рівняння

Як було зазначено вище таку систему можна звести до однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Структуру розв'язку таких рівнянь ми вже визначили в пункті 10.4.1 та звели в таблицю 10.1, хоча на практиці доцільно не зводити систему до одного рівняння, а шукати розв'язки системи так:

$$x = r_1 e^{kt}, \quad y = r_2 e^{kt}$$

де r_1, r_2, k і – невизначені сталі, які потрібно знайти.

Продиференціюємо функції x, y та підставимо результати в (10.42), отримаємо

$$\begin{cases} r_1 k e^{kt} = a_1 r_1 e^{kt} + b_1 r_2 e^{kt} \\ r_2 k e^{kt} = a_2 r_1 e^{kt} + b_2 r_2 e^{kt}. \end{cases}$$

Скоротимо вираз на e^{kt} та перенесемо всі члени ліворуч, отримаємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases}(a_1 - k)r_1 + b_1 r_2 = 0\\ a_2 r_1 + (b_2 - k)r_2 = 0\end{cases} \qquad (10.43)$$

Щоб існував ненульовий розв'язок цієї системи, необхідно та достатньо, щоб визначник системи дорівнював нулю

$$\begin{vmatrix} a_1 - k & b_1 \\ a_2 & b_2 - k \end{vmatrix} = 0. \qquad (10.44)$$

Розкриваючи цей визначник, отримаємо рівняння другого степеня відносно k.

Підставляючи по черзі корені характеристичного рівняння у (10.43), ми отримаємо неоднорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які легко можна розв'язати, наприклад, за допомогою методу Крамера. Розв'язок такої системи при кожній підстановці кореня характеристичного рівняння, буде обумовлюватися однією вільною константою. Розв'язок системи (10.42) записується як лінійна комбінація отриманих розв'язків.

Проілюструємо наведений алгоритм прикладом.

Приклад 10.24. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -8x - y. \end{cases}$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння системи має такий вигляд:

$$\begin{vmatrix} 1 - k & -1 \\ -8 & -1 - k \end{vmatrix} = (1 - k)(-1 - k) - (-1)(-8) = k^2 - 9 = 0.$$

Звідси $k_1 = -3;\ k_2 = 3$.

При $k_1 = -3$ перший розв'язок системи

$$x = e^{-3t}; \quad \Rightarrow \quad y = x - x' = e^{-3t} + 3e^{-3t} = 4e^{-3t}$$

при $k_2 = 3$ другий розв'язок системи

$$x = e^{3t}; \quad \Rightarrow \quad y = x - x' = e^{3t} - 3e^{-3t} = -2e^{-3t}.$$

Отже, загальний розв'язок системи виглядає так:

$$x = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{3t};$$
$$y = 4C_1 e^{-3t} - 2C_2 e^{3t}.$$

Контрольні питання

1. Подайте визначення диференціального рівняння.
2. Як визначити порядок диференціального рівняння?
3. Що таке загальний розв'язок диференціального рівняння?
4. Що таке частинний розв'язок диференціального рівняння?
5. Сформулюйте теорему існування розв'язку диференціального рівняння.
6. Опишіть метод інтегрування диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними.
7. Як визначити однорідні диференціальні рівняння першого порядку? За допомогою якої підстановки ці рівняння зводяться до рівнянь із відокремлюваними змінними?
8. Опишіть лінійні диференціальні рівняння першого порядку та методи їхнього інтегрування.
9. Рівняння якого виду називаються рівняннями Бернулі? Опишіть алгоритм їхнього розв'язання.
10. Які диференціальні рівняння називаються рівняннями у повних диференціалах? Опишіть метод їхнього інтегрування.
11. Які типи диференціальних рівнянь вищих порядків дозволяють пониження порядку? За допомогою яких підстановок?
12. Як скласти характеристичне рівняння, що відповідає лінійному однорідному диференціальному рівняння зі сталими коефіцієнтами?
13. Опишіть структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

14. За яким принципом складається структура частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами?
15. Подайте визначення системи лінійних диференціальних рівнянь.
16. Що називається розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
17. Яка система лінійних диференціальних рівнянь називається нормальною?
18. Опишіть алгоритм зведення довільної системи лінійних алгебраїчних рівнянь до нормальної.
19. Опишіть алгоритм розв'язання системи лінійних однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами шляхом зведення її до рівняння вищого порядку.
20. Опишіть алгоритм розв'язання системи лінійних однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами за допомогою характеристичного рівняння.

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

Тема «КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА»

Алгебраїчна форма комплексного числа $$\boldsymbol{z = a + ib}$$ (a - дійсна частина, b – уявна частина)	$z = 5 + 3i$; (5 - дійсна частина, 3 – уявна частина)
Модуль комплексного числа $\lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$.	Знайти модуль числа $z = 5 + 3i$ $\lvert z\rvert = \sqrt{5^2 + 3^2} = \boldsymbol{\sqrt{34}}$
Операції над комплексними числами $z_1 = a_1 + ib_1$ і $z_2 = a_2 + ib_2$: 1) Додавання $\boldsymbol{z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i}$; 2) Віднімання $\boldsymbol{z = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i}$; 3) Множення $\boldsymbol{z = (a_1a_2 - b_1b_2) +}$ $\boldsymbol{+(a_1b_2 + a_2b_1)i}$; 4) Ділення $z = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i.$	Знайти суму, різницю, добуток і частку комплексних чисел $z_1 = 4 + 5i$ і $z_2 = -3 + 2i$. 1) $z = (4 - 3) + (5 + 2)i = \boldsymbol{1 + 7i}$; 2) $z = (4 + 3) + (5 - 2)i = \boldsymbol{7 + 3i}$; 3) $z = (4 \cdot (-3) - 5 \cdot 2) +$ $+(4 \cdot 2 + (-3) \cdot 5)i = \boldsymbol{-22 - 7i}$; 4) $z = \frac{4\cdot(-3)+5\cdot 2}{(-3)^2+2^2} + \frac{4\cdot 2-(-3)\cdot 5}{(-3)^2+2^2}i =$ $= -\boldsymbol{\frac{2}{13}} + \boldsymbol{\frac{23}{13}i}$.
Число $a - ib$ є **комплексно спряженим** до числа $a + ib$	Знайти число, комплексно спряжене до числа $z = -3 + 8i$. $\boldsymbol{z = -3 - 8i}$ – комплексно спряжене
Тригонометрична форма запису комплексного числа $\boldsymbol{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$, **Показникова** форма запису комплексного числа $\boldsymbol{z = re^{i\varphi}}$**,** де $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $Arg z = \varphi = \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$.	Представити комплексне число $z = 1 + \sqrt{3}i$ у тригонометричній формі. $r = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$; $\sin\varphi = \frac{1}{2}$; $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{b}{a} = \mathrm{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$; $\boldsymbol{z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$; $\boldsymbol{z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}}$**.**

Натуральний n-й степень комплексного числа z $\boldsymbol{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$- в тригонометричній формі $\boldsymbol{z^n = r^n e^{i\varphi n}}$- в показниковій формі	Обчислити $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$. $r = \lvert z\rvert = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2;$ $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6};$ $\left(\sqrt{3}+i\right)^6 = 2^6\left(\cos\frac{6\cdot\pi}{6} + i\sin\frac{6\cdot\pi}{6}\right) =$ $= \boldsymbol{64(\cos\pi + i\sin\pi)}$- в тригонометричній формі або $\left(\sqrt{3}+i\right)^6 = \boldsymbol{64e^{i\pi}}$- в показниковій формі
Корінь n-го степеня з комплексного числа z $\boldsymbol{\sqrt[n]{z}} =$ $= \boldsymbol{\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right)}$, де$k = 0,1,2,\dots,n-1$.	Знайти корені рівняння $\boldsymbol{z^6 + 64 = 0}$ $z^6 = -64;$ $r = \lvert z\rvert = 64\sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 2;$ $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{0}{-1}\right) = \operatorname{arctg} 0 = \pi.$ Отже число -64 в комплексній формі має вигляд $-64 = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$ж $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) =$ $= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\sqrt{3} + i};$ $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \boldsymbol{2i};$ $z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) =$ $= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{-\sqrt{3} + i};$ $z_4 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) =$ $= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{-\sqrt{3} - i};$ $z_5 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = \boldsymbol{-2i}$ $z_6 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) =$ $= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\sqrt{3} - i}.$

Тема «НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ»

Основна таблиця інтегралів

1	$\int du = u + C$
2	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C(n \neq -1)$
2а	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$
2б	$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$
3	$\int a^u du = \frac{a^u}{lna} + C$
4	$\int e^u du = e^u + C$
5	$\int \frac{du}{u} = ln\|u\| + C$
6	$\int cosu = sinu + C$
7	$\int sinu = -cosu + C$
8	$\int \frac{du}{cos^2 u} = tgu + C$
9	$\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctgu + C$
10	$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$
11	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln \left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + C$
12	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = ln \left\|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\| + C$
13	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsin \frac{u}{a} + C$

Додаткові формули

$\int \operatorname{tg} u \, du = -\ln\|\cos u\| + C$	$\int \operatorname{ctg} u \, du = \ln\|\sin u\| + C$
$\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left\|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right\| + C$	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left\|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$

Основні властивості невизначених інтегралів

$\int (u+v)dx = \int udx + \int vdx$	$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$
$\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$	$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$
$\int (C_1u + C_2v)dx = C_1\int udx + C_2\int vdx$	$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

Метод заміни змінної

$\int \boldsymbol{f(\varphi(t))\varphi'(t)dt} = $ $= \int \boldsymbol{f(x)dx}\Big\|_{\boldsymbol{x=\varphi(t)}}$	$\int \frac{xdx}{6x^2-5} = \begin{bmatrix} u = 6x^2-5 \\ du = 12xdx \\ xdx = \frac{1}{12}du \end{bmatrix} = \frac{1}{12}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{12}\ln\|u\| + C =$ (ф-ла 5) $= \frac{1}{12}\ln\|6x^2-5\| + C.$
	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}arcsin^2 3x} = \begin{bmatrix} u = arcsin3x \\ du = \frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}} \\ \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{1}{3}du \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{3u} + C =$ (2б) $= -\frac{1}{3arcsin3x} + C.$
	$\int \frac{e^{\operatorname{ctg} 7x}}{\sin^2 7x}dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{ctg} 7x \\ du = -\frac{7dx}{\sin^2 7x} \\ \frac{dx}{\sin^2 7x} = -\frac{1}{7}du \end{bmatrix} = -\frac{1}{7}\int e^u du = -\frac{1}{7}e^u + C =$ (ф-ла 4) $= -\frac{1}{7}e^{\operatorname{ctg} 7x} + C.$
	$\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{\cos^2 x + 5}} = \begin{bmatrix} u = \cos^2 x + 5 \\ du = 2\cos x \sin x\, dx = \sin 2x\, dx \\ \sin 2x\, dx = du \end{bmatrix} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} =$ (ф-ла 2а) $= 2\sqrt{u} + C = 2\sqrt{\cos^2 x + 5} + C.$
	$\int \frac{dx}{(5x+3)\ln^4(5x+3)} = \begin{bmatrix} u = \ln(5x+3) \\ du = \frac{5dx}{5x+3} \\ \frac{dx}{5x+3} = \frac{1}{5}du \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{u^4} = \frac{1}{5}\int u^{-4}du =$ $= (\text{ф} - \text{ла } 2) = \frac{1}{5}\cdot\frac{u^{-3}}{(-3)} + C = -\frac{1}{15u^3} + C = -\frac{1}{15\ln^3(5x+3)} + C.$
	$\int \frac{e^{3x}dx}{\sqrt{16-e^{6x}}} = \begin{bmatrix} u = e^{3x} \\ du = 3e^{3x}dx \\ e^{3x}dx = \frac{1}{3}du \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{16-u^2}}$ $= (\text{ф} - \text{ла } 13) =$ $= \frac{1}{3}\arcsin\frac{u}{4} + C = \frac{1}{3}\arcsin\frac{e^{3x}}{4} + C.$

Інтегрування функцій, які містять квадратний тричлен.

Інтеграли, які мають вигляд $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ або $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Метод: виділення повного квадрату.

Допоміжні формули: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Інтеграли зводяться до формул: $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \to \left[\begin{matrix}(10)\\(11)\end{matrix}\right.$	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$. $[x^2 + 6x + 13 = (x^2 + 6x + 9) - 9 + 13 = (x+3)^2 + 4;$ $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2;$ $a^2 = x^2; \quad 2ab = 6x;$ $\boldsymbol{a = x}; \quad 2xb = 6x;$ $\boldsymbol{b = 3}]$ $\int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+4} = [10] = \boldsymbol{\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+3}{2} + C}.$ Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{x^2+8x-20}$. $[x^2 + 8x - 20 = (x^2 + 8x + 16) - 16 - 20 = (x+4)^2 - 36;$ $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2;$ $a^2 = x^2; \quad 2ab = 8x;$ $\boldsymbol{a = x}; \quad 2xb = 8x;$ $\boldsymbol{b = 4}]$ $\int \frac{dx}{x^2+8x-20} = \int \frac{dx}{(x+4)^2-36} = [11] = \frac{1}{2\cdot 6}\ln\left\lvert\frac{x+4-6}{x+4+6}\right\rvert + C =$ $= \boldsymbol{\frac{1}{12}\ln\left\lvert\frac{x+2}{x+10}\right\rvert + C}.$
Інтеграли зводяться до формул: $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \to \left[\begin{matrix}(12)\\(13)\end{matrix}\right.$	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-10x+3}}$. $[x^2 - 10x + 3 = (x^2 - 10x + 25) - 25 + 3 = (x-5)^2 - 22;$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2;$ $a^2 = x^2; \quad 2ab = 10x;$ $\boldsymbol{a = x}; \quad 2xb = 10x;$ $\boldsymbol{b = 5}]$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-10x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-5)^2-22}} = [12] =$ $= \boldsymbol{\ln\left\lvert x - 5 + \sqrt{(x-5)^2 - 22}\right\rvert + C}.$ Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{7+2x-x^2}}$. $[7 + 2x - x^2 = -(x^2 - 2x - 7);$ $x^2 - 2x + 7 = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 7 = (x-1)^2 - 8;$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2;$ $a^2 = x^2; \quad 2ab = 2x;$ $\boldsymbol{a = x}; \quad 2xb = 2x;$ $\boldsymbol{b = 1}$ $7 + 2x - x^2 = 8 - (x-1)^2]$ $\int \frac{dx}{\sqrt{7+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{8-(x-1)^2}} = [13] = \boldsymbol{\arcsin\frac{x-1}{2\sqrt{2}} + C}.$

Інтеграли, які мають вигляд $\int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}$ або $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Метод: **виділення диференціала знаменника (або підкореневого виразу знаменника) та представлення інтегралу у вигляді суми двох інтегралів**

Інтеграли зводяться до формул: $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ $\swarrow$ $\searrow$ $\int \frac{du}{u}$ (10)(11)	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{(x-5)dx}{x^2+12x-3}$. $[d(x^2+12x-3)=(2x+12)dx]$; $\frac{1}{2}\int \frac{2x-10}{x^2+12x-3}dx=\frac{1}{2}\int \frac{(2x+12)-12-10}{x^2+12x-3}dx=$ $=\frac{1}{2}\int \frac{(2x+12)dx}{x^2+12x-3}-\frac{22}{2}\int \frac{dx}{x^2+12x-3}=I_1+I_2.$ $I_1=\frac{1}{2}\int \frac{(2x+12)dx}{x^2+12x-3}=\begin{bmatrix} u=x^2+12x-3 \\ du=(2x+12)dx \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}=$ $=\frac{1}{2}\ln\lvert u\rvert+C=\mathbf{\frac{1}{2}\ln\lvert x^2+12x-3\rvert+C}$; $I_2=-11\int \frac{dx}{x^2+12x-3}=-11\int \frac{dx}{(x+6)^2-39}=$ $=\mathbf{-\frac{11}{2\sqrt{39}}\ln\left\lvert\frac{x+6-\sqrt{39}}{x+6+\sqrt{39}}\right\rvert+C;}$ $I=I_1+I_2=\mathbf{\frac{1}{2}\ln\lvert x^2+12x-3\rvert-\frac{11}{2\sqrt{39}}\ln\left\lvert\frac{x+6-\sqrt{39}}{x+6+\sqrt{39}}\right\rvert+C.}$
Інтеграли зводяться до формул: $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $\swarrow$ $\searrow$ $\int \frac{du}{\sqrt{u}}$ (12)(13)	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$. $[d(x^2-4x+5)=(2x-4)dx]$; $3\int \frac{\left(x+\frac{1}{3}\right)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}=\frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{2}{3}}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx=\frac{3}{2}\int \frac{(2x-4)+4+\frac{2}{3}}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx=$ $=\frac{3}{2}\int \frac{(2x-4)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}+\frac{3}{2}\cdot\frac{14}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}=I_1+I_2.$ $I_1=\frac{3}{2}\int \frac{(2x-4)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}=\begin{bmatrix} u=x^2-4x+5 \\ du=(2x-4)dx \end{bmatrix}=\frac{3}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}}=$ $=\frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{u}+C=\mathbf{3\sqrt{x^2-4x+5}+C}$; $I_2=7\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}=7\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+1}}=$ $=\mathbf{7\ln\left\lvert x+2+\sqrt{x^2-4x+5}\right\rvert+C;}$ $I=I_1+I_2=$ $=\mathbf{3\sqrt{x^2-4x+5}+7\ln\left\lvert x+2+\sqrt{x^2-4x+5}\right\rvert+C.}$

Інтеграли, які мають вигляд $\int \frac{dx}{(x-d)\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

За допомогою підстановки $\boldsymbol{x-d=\frac{1}{u}}$ інтеграл зводиться до інтегралу вигляду $\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\sqrt{\boldsymbol{ax^2+bx+c}}}$	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x+5}}$. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x+5}} = \begin{bmatrix} x-1=\frac{1}{u} \\ x=\frac{1}{u}+1 \\ dx=-\frac{du}{u^2} \end{bmatrix} = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\sqrt{\left(\frac{1}{u}+1\right)^2-4\left(\frac{1}{u}+1\right)+5}} =$ $= \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1+2u+u^2-4u-4u^2+5u^2}{u^2}}} = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{\sqrt{2u^2-2u+1}}{u^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{\sqrt{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}} =$ $= -\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left\|u-\frac{1}{2}+\sqrt{u^2+u+\frac{1}{2}}\right\|+C}$

ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

Інтегрування раціональних дробів, корені знаменника яких дійсні та різні $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a_1}+\frac{B}{x-a_2}+\cdots+\frac{C}{x-a_n}$ $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx =$ $= A\int \frac{dx}{x-a_1}+B\int \frac{dx}{x-a_2}+\cdots$ $+C\int \frac{dx}{x-a_n} =$	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{6x^2-15x-6}{(x-1)(x^2+2x-8)}dx$. Розкладемо знаменник на множники $Q(x)=(x-1)(x^2+2x-8)=(x-1)(x+4)(x-2)$; $\frac{6x^2-15x-6}{(x+1)(x+4)(x-2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+4}+\frac{C}{x-2}$; приведемо дробі до спільного знаменника $6x^2-15x-6 = A(x+4)(x-2)+B(x-1)(x-2)+$ $= C(x-1)(x+4)$; $x = \ \ 1\|6-15-6=-5A; \quad \Rightarrow \boldsymbol{A=3;}$ $x=-4\|96+60-6=30B; \quad \Rightarrow \boldsymbol{B=5;}$ $x= \ \ 2\|24-30-6=6C; \quad \Rightarrow \boldsymbol{C=-2;}$ $\int \frac{6x^2-15x-6}{(x-1)(x+4)(x-2)}dx = 3\int \frac{dx}{x-1}+5\int \frac{dx}{x+4}-2\int \frac{dx}{x-2} =$ $= \boldsymbol{3\ln\|x-1\|+5\ln\|x+4\|-2\ln\|x-2\|+C.}$
Інтегрування раціональних дробів, корені знаменника яких дійсні та серед яких є кратні $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\frac{B}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}}+$ $+\frac{C}{(x-a_1)^{\alpha_1-2}}+\cdots+\frac{D}{x-a_1}+\cdots+$ $+\frac{E}{x-a_n}$	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{2x^2-6x+12}{x^3-4x^2+4x}dx$. Розкладемо знаменник на множники $Q(x)=x^3-4x^2+4x=x(x-2)^2$; $\frac{2x^2-6x+12}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x-2}$; приведемо дробі до спільного знаменника $2x^2-6x+12=A(x-2)^2+Bx+Cx(x-2)$; $x=0\|12=4A; \quad \Rightarrow \boldsymbol{A=3;}$ $x=2\|8-12+12=2B; \quad \Rightarrow \boldsymbol{B=4.}$ Підставимо в отриману рівність будь-яке значення x, наприклад $x=1$: $2-6+12=A+B-C$;нам вже відомі значення A і B: $8=3+4-C; \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{C=-1.}$ $\int \frac{2x^2-6x+12}{x(x-2)^2}dx = 3\int \frac{dx}{x}+4\int \frac{dx}{(x-2)^2}-\int \frac{dx}{x-2} =$ $= \boldsymbol{3\ln\|x\|-\frac{4}{x-2}-\ln\|x-2\|+C}.$

Інтегрування раціональних дробів, серед коренів знаменника якого є комплексні $Q(x)=(x-x_1)\dots(x^2+a^2)$ $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-x_1)}+\dots+\frac{Bx+C}{(x^2+a^2)}$ або $Q(x)=(x-x_1)\dots(ax^2+bx+c)$ $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-x_1)}+\dots+\frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)}$	Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{6x^2+x+6}{(x-2)(x^2+4)}dx$. $\frac{6x^2+x+6}{(x-2)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$, приведемо дробі до спільного знаменника $6x^2+x+6=A(x^2+4)+(Bx+C)(x-2)$. Підставимо єдиний відомий нам корінь $x=2$: $6\cdot 2^2+2+6=A(2^2+4) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A=4;}$ інші коефіцієнти знайдемо, якщо розкриємо дужки, порівняємо коефіцієнти при однакових степенях x та підставимо відоме нам значення коефіцієнта A $6x^2+x+6=Ax^2+4A+Bx^2-2Bx+Cx-2C$; $\begin{array}{l\|l} x^2 & 6=A+B \qquad \boldsymbol{B=2} \\ x^1 & 1=-2B+C\Rightarrow \boldsymbol{C=5} \\ x^0 & 6=4A-2C \end{array}$ $\int\frac{6x^2+x+6}{(x-2)(x^2+4)}dx=4\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{2x+5}{x^2+4}dx=4\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{2xdx}{x^2+4}+$ $+5\int\frac{dx}{x^2+4}=\boldsymbol{4\ln\|x-2\|+\ln\|x^2+4\|+\frac{5}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C}$. Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{5x^2+x+4}{x^3-1}dx$ Розкладемо знаменник на множники $Q(x)=(x-1)(x^2+x+1)$. $\frac{5x^2+x+4}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$; приведемо дробі до спільного знаменника $5x^2+x+4=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)$; Підставимо єдиний відомий нам корінь $x=1$: $5+1+4=A(1+1+1); \quad \Rightarrow \quad A=3$; інші коефіцієнти знайдемо, якщо розкриємо дужки, порівняємо коефіцієнти при однакових степенях x та підставимо відоме нам значення коефіцієнта A $5x^2+x+4=Ax^2+Ax+A+Bx^2-Bx+Cx-C$; $\begin{array}{l\|l} x^2 & 5=A+B \qquad \boldsymbol{B=2} \\ x^1 & 1=-B+C\Rightarrow \boldsymbol{C=-1} \\ x^0 & 4=A-C \end{array}$ $\int\frac{5x^2+x+4}{(x-1)(x^2+x+1)}dx=3\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{2x-1}{x^2+x+1}dx=3\int\frac{dx}{x-1}+$ $\int\frac{(2x+1)-1-1}{x^2+x+1}dx=3\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}-2\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$ $=\boldsymbol{3\ln\|x-1\|+\ln\|x^2+x+1\|-\frac{4}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.}$

ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

$\int P_n(x)\cdot\begin{matrix} sin(ax+b)\\ cos(ax+b)\\ tg(ax+b)\\ ctg(ax+b)\end{matrix}\cdot dx$ $(u = P_n(x))$	Знайти невизначений інтеграл $\int(3x-5)\sin 7x\,dx$. $\int(3x-5)\sin 7x\,dx = \begin{bmatrix} u = 3x-5 & du = 3\,dx\\ dv = \sin 7x\,dx & v = -\frac{1}{7}\cos 7x\end{bmatrix} =$ $= -\frac{1}{7}(3x-5)\cos 7x + \frac{1}{7}\cdot 3\int\cos 7x\,dx =$ $= \boldsymbol{-\frac{1}{7}(3x-5)\cos 7x + \frac{3}{49}\sin 7x + C}$.
$\int P_n(x)a^x dx$ $(u = P_n(x))$	Знайти невизначений інтеграл $\int(3x^2-11)e^{6x}dx$. $\int(3x^2-11)e^{5x}dx = \begin{bmatrix} u = 3x^2-11 & du = 6xdx\\ dv = e^{5x}dx & v = \frac{1}{5}e^{5x}dx\end{bmatrix} =$ $= \frac{1}{5}(3x^2-11)e^{5x} - \frac{6}{5}\int x\,e^{6x}dx =$ $= \begin{bmatrix} u = x & du = dx\\ dv = e^{5x}dx & v = \frac{1}{5}e^{5x}dx\end{bmatrix} = \frac{1}{5}(3x^2-11)e^{5x} -$ $-\frac{6}{5}\left(\frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{5}\int e^{6x}dx\right) = \boldsymbol{\frac{1}{5}(3x^2-11)e^{5x} - \frac{6}{25}xe^{5x}} +$ $+\boldsymbol{\frac{6}{125}e^{5x} + C}$.
$\int \log_a(ax+b)\,dx$ $(u = \log_a(ax+b))$	Знайти невизначений інтеграл $\int\ln(4x+3)\,dx$. $\int\ln(4x+3)\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln(4x+3) & du = \frac{4}{4x+3}dx\\ dv = dx & v = x\end{bmatrix} =$ $= x\ln(4x+3) - \int\frac{4x}{4x+3}dx = x\ln(4x+3) -$ $-\int\frac{(4x+3)-3}{4x+3}dx = x\ln(4x+3) - \int dx + 3\int\frac{dx}{4x+3} =$ $= \boldsymbol{x\ln(4x+3) - x + \frac{3}{4}\ln(4x+3) + C}$.
$\int P_n(x)\log_a(ax+b)dx$ $(u = \log_a(ax+b))$	Знайти невизначений інтеграл $\int x^3\ln x\,dx$. $\int x^3\ln x\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx\\ dv = x^3dx & v = \frac{1}{4}x^4\end{bmatrix} = \frac{1}{4}x^4\ln x -$ $-\frac{1}{4}\int x^4\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{4}\int x^3\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.}$
$\int\begin{matrix} arcsin(ax+b)\\ arccos(ax+b)\\ arctg(ax+b)\\ arcctg(ax+b)\end{matrix}\cdot dx$ $\left(u = \begin{matrix} arcsin(ax+b)\\ arccos(ax+b)\\ arctg(ax+b)\\ arcctg(ax+b)\end{matrix}\right)$	Знайти невизначений інтеграл $\int\arcsin 6x\,dx$. $\int\arcsin 6x\,dx = \begin{bmatrix} u = \arcsin 6x & du = \frac{6}{\sqrt{36-x^2}}dx\\ dv = dx & v = x\end{bmatrix} =$ $= x\arcsin 6x - \frac{6}{(-2)}\int\frac{-2\cdot x\,dx}{\sqrt{36-x^2}} = x\arcsin 6x + 3\int\frac{d(36-x^2)}{\sqrt{36-x^2}} =$ $= \boldsymbol{x\arcsin 6x + 6\sqrt{36-x^2} + C.}$

$\int P_n(x)\cdot \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \cdot dx$ $\left(u = \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix}\right)$	Знайти невизначений інтеграл $\int x \operatorname{arctg} 2x\, dx$. $\int x \operatorname{arctg} 2x\, dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} 2x & du = \frac{2dx}{x^2+4} \\ dv = xdx & v = \frac{1}{2}x^2 \end{bmatrix} =$ $= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} 2x - 2\cdot\frac{1}{2}\int \frac{x^2dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} 2x -$ $- \int \frac{(x^2+4)-4}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} 2x - \int dx + 4\int \frac{dx}{x^2+4} =$ $= \boldsymbol{\frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} 2x - x + 2 \operatorname{arctg} 2x + C}$.
та багато інших…	Знайти невизначений інтеграл $\int e^{5x} \cos 3x\, dx$. $\int e^{5x}\cos 3x\, dx = \begin{bmatrix} u = e^{5x} & du = 5e^{5x}dx \\ dv = \cos 3x\, dx & v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{bmatrix} =$ $= \frac{1}{3}e^{5x}\sin 3x - \frac{5}{3}\int e^{5x}\sin 3x\, dx =$ $= \begin{bmatrix} u = e^{5x} & du = 5e^{5x}dx \\ dv = \sin 3x\, dx & v = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{bmatrix} = \frac{1}{3}e^{5x}\sin 3x -$ $-\frac{5}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{5x}\cos 3x + \frac{5}{3}\int e^{5x}\cos 3x\, dx\right)$. Позначимо $I = \int e^{5x}\cos 3x\, dx$, отримаємо лінійне рівняння відносно шуканого інтегралу. Розв'яжемо його, та дістанемо відповідь: $I = \frac{1}{3}e^{5x}\sin 3x + \frac{5}{9}e^{5x}\cos 3x - \frac{5}{9}I$; $I + \frac{5}{9}I = \frac{1}{9}(3\, e^{5x}\sin 3x + 5\, e^{5x}\cos 3x)$; $I = \boldsymbol{\frac{1}{14}(3\, e^{5x}\sin 3x + 5\, e^{5x}\cos 3x) + C}$.

ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Інтеграли типу $\boldsymbol{\int R(sinx, cosx)dx}$ знаходяться за допомогою універсальної тригонометричної підстановки $\boldsymbol{u = tg\frac{x}{2}}$; $sinx = \frac{2u}{1+u^2}$; $cosx = \frac{1-u^2}{1+u^2}$; $dx = \frac{2du}{1+u^2}$.	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{3\cos x + 4\sin x - 7}$. $\int \frac{dx}{3\cos x+4\sin x-7} = \begin{bmatrix} u = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2u}{1+u^2} \\ \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} & dx = \frac{2du}{1+u^2} \end{bmatrix} =$ $= \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{3\cdot\frac{1-u^2}{1+u^2} + 4\cdot\frac{2u}{1+u^2} - 7} = 2\int \frac{du}{3-3u^2+8u-7-7u^2} = 2\int \frac{du}{-10u^2+8u-4}$ $= -\frac{1}{5}\int \frac{du}{u^2-\frac{4}{5}u-\frac{2}{5}} = -\frac{1}{5}\int \frac{du}{\left(u-\frac{2}{5}\right)^2-\frac{14}{25}} = -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{14}}{5}}\ln\left\|\frac{u-\frac{2}{5}-\frac{\sqrt{14}}{5}}{u-\frac{2}{5}+\frac{\sqrt{14}}{5}}\right\| +$ $+C = \boldsymbol{-\frac{1}{2\sqrt{14}}\ln\left\|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2-\sqrt{14}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2+\sqrt{14}}\right\| + C}$.

Інтеграли типу $\int R(sinx)cosxdx$ знаходяться за допомогою підстановки $u = sinx \quad du = cosxdx$	Знайти невизначений інтеграл $\int \sin^3 4x \cos 4x\, dx$. $\int \sin^3 4x \cos 4x\, dx = \begin{bmatrix} u = \sin 4x \\ du = 4\cos 4x\, dx \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\int u^3 du =$ $= \frac{1}{4}\cdot\frac{u^4}{4} + C = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}}\mathbf{\sin^4 4x + C}$.
Інтеграли типу $\int R(cosx)sinxdx$ знаходяться за допомогою підстановки $u = cosx \quad du = -sinxdx$	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{\sin 5x\, dx}{\cos^2 5x - 9}$. $\int \frac{\sin 5x\, dx}{\cos^2 5x - 9} = \begin{bmatrix} u = \cos 5x \\ du = -5\sin 5x\, dx \end{bmatrix} = -\frac{1}{5}\int \frac{du}{u^2-9} =$ $= -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left\|\frac{u-3}{u+3}\right\| + C = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{30}}\mathbf{\ln\left\|\frac{\cos 5x-3}{\cos 5x+3}\right\| + C}$.
Інтеграли типу $\int R(tgx)dx$ знаходяться за допомогою підстановки $u = tgx dx = \frac{du}{1+u^2}$ (якщо підінтегральна функція типу $R(sinx, cosx)$, але і $sinx$ і $cosx$ знаходяться у парних степенях використовують ту ж саму підстановку) $sin^2x = \frac{u^2}{1+u^2} cos^2x = \frac{1}{1+u^2}$	Знайти невизначений інтеграл $\int \mathrm{tg}^4 7x\, dx$. $\int \mathrm{tg}^4 7x\, dx = \begin{bmatrix} u = \mathrm{tg}\, 7x \\ dx = \frac{1}{7}\frac{du}{u^2+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\int\frac{u^4 du}{u^2+1} =$ $= \frac{1}{7}\int\left(u^2 - 1 + \frac{1}{u^2+1}\right)du = \frac{1}{7}\left(\frac{u^3}{3} - u + \mathrm{arctg}\, u\right) + C =$ $= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{21}}\mathbf{tg^3 7x} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}\mathbf{tg\, 7x + x + C}$. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 5\sin 2x - 2\cos^2 x}$. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 5\sin 2x - 2\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 5\cdot 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x} =$ $= \begin{bmatrix} u = \mathrm{tg}\, x & dx = \frac{du}{u^2+1} \\ \sin x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} & \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \end{bmatrix} =$ $= \int \frac{\frac{du}{u^2+1}}{\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2 + 10\cdot\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} - 2\left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2} =$ $= \int\frac{du}{u^2+10u-2} = \int\frac{du}{(u+5)^2-27} = \frac{1}{2\cdot 3\sqrt{3}}\ln\left\|\frac{u+5-3\sqrt{3}}{u+5+3\sqrt{3}}\right\| + C =$ $= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6\sqrt{3}}}\mathbf{\ln\left\|\frac{tg\, x+5-3\sqrt{3}}{tg\, x+5+3\sqrt{3}}\right\| + C.}$
Інтегралі типу $\int sin^m x\, cos^n x dx$ 1) m або n- непарне число: - якщо m непарне число, використовуємо заміну $\mathbf{u = cosx}$ $\mathbf{1 - u^2 = sin^2x}$ $\mathbf{du = -sinxdx}$ - якщо n непарне число, використовуємо заміну $\mathbf{u = sinx}$ $\mathbf{1 - u^2 = cos^2x}$ $\mathbf{du = cosxdx}$	Знайти невизначений інтеграл $\int \sin^7 2x\cos^4 2x\, dx$. $\int \sin^7 2x\cos^4 2x\, dx = \int \cos^4 2x\sin^6 2x\sin 2x\, dx =$ $= \begin{bmatrix} u = \cos 2x \\ du = -2\sin 2xdx \\ \sin^6 2x = (\sin^2 2x)^3 = (1-u^2)^3 \end{bmatrix} =$ $= -\frac{1}{2}\int u^4(1-u^2)^3 du =$ $= -\frac{1}{2}\int(u^4 - 3u^6 + 3u^8 - u^{10})du =$ $= -\frac{1}{2}\cdot\frac{u^5}{5} + \frac{3}{2}\cdot\frac{u^7}{7} - \frac{3}{2}\cdot\frac{u^9}{9} + \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{11}}{11} + C =$ $= -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}\mathbf{\cos^5 2x} + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{14}}\mathbf{\cos^7 2x} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\mathbf{\cos^9 2x} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{22}}\mathbf{\cos^{11} 2x + C}$

2) m і n- парні числа користуємося формулами зниження степені для тригонометричних функцій $\boldsymbol{sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos2x)}$; $\boldsymbol{cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos2x)}$.	Знайти невизначений інтеграл $\int \sin^4 3x \cos^2 3x\, dx$. $\int \sin^4 3x \cos^2 3x\, dx = \begin{bmatrix} \cos^2 3x = \frac{1}{2}(1+\cos 6x) \\ \sin^4 3x = \left(\frac{1}{2}(1-\cos 6x)\right)^2 \end{bmatrix} =$ $= \frac{1}{8}\int (1 - 2\cos 6x + \cos^2 6x)\,(1+\cos 6x)dx =$ $= \frac{1}{8}\int (1 - 2\cos 6x + \cos^2 6x + \cos 6x - 2\cos^2 6x +$ $+ \cos^3 6x)dx =$ $= \frac{1}{8}\int (1 - \cos 6x - \cos^2 6x + \cos^3 6x)dx =$ $= \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 6x\, dx - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int (1+\cos 12x)dx +$ $+ \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{6}\int (1-\sin^2 6x)\, d(\sin 6x) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{6}\sin 6x -$ $- \frac{1}{16}x - \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{12}\sin 12x + \frac{1}{48}\sin 6x - \frac{1}{48}\cdot\frac{\sin^3 6x}{3} + C =$ $= \boldsymbol{\frac{1}{16}x - \frac{1}{192}\sin 12x - \frac{1}{144}\sin^3 6x + C.}$
Інтеграли типу $\boldsymbol{\int sin\alpha x\ cos\beta x\ dx}$, $\boldsymbol{\int sin\alpha x\ sin\beta x\ dx}$, $\boldsymbol{\int cos\alpha x\ cos\beta x\ dx}$ обчислюються за формулами перетворення добутку у суму: $sin\alpha x\ cos\beta x =$ $= \frac{1}{2}[sin(\alpha+\beta)x + sin(\alpha-\beta)x]$; $sin\alpha x\ sin\beta x =$ $= \frac{1}{2}[cos(\alpha-\beta)x - cos(\alpha+\beta)x]$; $cos\alpha x\ cos\beta x =$ $= \frac{1}{2}[cos(\alpha-\beta)x + cos(\alpha+\beta)x]$.	Знайти невизначений інтеграл $\int \sin 7x \cos 3x\, dx$. $\int \sin 7x \cos 3x\, dx =$ $= \frac{1}{2}\int (\sin(7x+3x) + \sin(7x-3x))\, dx =$ $= \frac{1}{2}\int (\sin 10x + \sin 4x)\, dx =$ $= \boldsymbol{-\frac{1}{20}\cos 10x - \frac{1}{8}\cos 4x + C.}$

ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Інтеграли типу $\boldsymbol{\int R\left(x, \sqrt[m]{ax+b}, \sqrt[n]{ax+b}, \dots, \sqrt[k]{ax+b}\right)dx}$ необхідна підстановка $ax + b = u^p$, де p- найменше спільне кратне чисел $m, n, \dots k$	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+3}+4}$. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+3}+4} = \begin{bmatrix} x+3 = u^2 \\ dx = 2udu \end{bmatrix} = \int \frac{(u^2-3)2udu}{u+4} = 2\int \frac{u^3-6u}{u+4}du =$ $= 2\int \left(u^2 - 4u + 10 - \frac{30}{u+4}\right)du =$ $= 2\frac{u^3}{3} - 8\frac{u^2}{2} + 20u - 60\ln\lvert u+4\rvert + C =$ $= \boldsymbol{\frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3} - 4(x+3) + 20\sqrt{x+3} -}$ $\boldsymbol{-60\ln\left\lvert\sqrt{x+3}+4\right\rvert + C}.$

	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-5}+3\sqrt[4]{2x-5}}$. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-5}+3\sqrt[4]{2x-5}} = \begin{bmatrix} 2x-5=u^4 \\ 2dx=4u^3du \\ dx=2u^3du \end{bmatrix} = \int \frac{2u^3du}{u^2+3u} =$ $= 2\int \frac{u^2du}{u+3} = 2\int \left(u-3+\frac{9}{u+3}\right)du =$ $= 2\frac{u^2}{2} - 6u + 18\ln\|u+3\| + C =$ $= \boldsymbol{\sqrt{2x-5} - 6\sqrt[4]{2x-5} + 18\ln\left\|\sqrt[4]{2x-5}+3\right\| + C.}$
Інтеграли типу а) $\int \boldsymbol{R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx}$ Підстановка $x = a\,sint;$ $\sqrt{a^2-x^2} = a\,cost;$ $dx = a\,costdt.$	Знайти невизначений інтеграл $\int x^4\sqrt{4-x^2}dx$. $\int x^4\sqrt{4-x^2}dx = \begin{bmatrix} x=2\sin t \\ \sqrt{4-x^2}=2\cos t \\ dx=2\cos t\,dt \end{bmatrix} =$ $= \int (2\sin t)^4\, 2\cos t\, 2\cos t\,dt = 64\int \sin^4 t\cos^2 t\,dt =$ $= 64\int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\right)^2 \frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt =$ $= 8\int (1-2\cos 2t+\cos^2 2t)\,(1+\cos 2t)dt =$ $= 8\int (1-\cos 2t-\cos^2 2t+\cos^3 2t)\,dt =$ $= 8\int dt - 8\int \cos 2t\,dt - 4\int (1+\cos 4t)dt +$ $+4\int (1-\sin^2 2t)\,d(\sin 2t) = 8t - 4\sin 2t - 4t -$ $-\sin 4t + 4\sin 2t - 4\frac{\sin^3 2t}{3} + C =$ $= \boldsymbol{4t - \sin 4t - \frac{4}{3}\sin^3 2t + C,}$ **де** $\boldsymbol{t = \arcsin\frac{x}{2}}$. Або перепишемо остаточний вираз як $4t - 4\sin t\cos t(1-2\sin^2 t) - \frac{4}{3}(2\sin t\cos t)^3 + C =$ $= 4\arcsin\frac{x}{2} - 4\frac{x}{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\left(1-2\left(\frac{x}{2}\right)^2\right) - \frac{4}{3}\left(2\frac{x}{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^3 + C$ $\boldsymbol{= 4\arcsin\frac{x}{2} - x\sqrt{4-x^2}\left(1-\frac{1}{2}x^2\right) - \frac{1}{6}x^3\sqrt{(4-x^2)^3} + C}$
б) $\int \boldsymbol{R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx}$ Підстановка $x = \frac{a}{sint};$ $\sqrt{x^2-a^2} = a\,tgt;$ $dx = -\frac{acost}{sin^2t}dt.$	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} = \begin{bmatrix} x=\frac{3}{\sin t} \\ \sqrt{x^2-9}=3\frac{\sin t}{\cos t}=3\,\mathrm{tg}\,t \\ dx=-\frac{3\cos t}{\sin^2 t}dt \end{bmatrix} = \int \frac{-\frac{3\cos t}{\sin^2 t}dt}{\left(\frac{3}{\sin t}\right)^2\cdot 3\frac{\sin t}{\cos t}} =$ $= -\frac{1}{9}\int \frac{\cos^2 t}{\sin t}dt = -\frac{1}{9}\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t}dt = -\frac{1}{9}\int \frac{dt}{\sin t} +$ $+\frac{1}{9}\int \sin t\,dt = \boldsymbol{-\frac{1}{9}\ln\left\|\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right\| - \frac{1}{9}\cos t + C},$ **де** $\boldsymbol{t = \arcsin\frac{3}{x}.}$
в) $\int \boldsymbol{R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx}$ Підстановка $x = a\,tgt;$ $\sqrt{x^2+a^2} = \frac{a}{cost};$ $dx = \frac{a\,dt}{cos^2t}.$	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x^3}dx$. $\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x^3}dx = \begin{bmatrix} x=4\,\mathrm{tg}\,t=4\frac{\sin t}{\cos t} \\ \sqrt{x^2+16}=\frac{4}{\cos t} \\ dx=\frac{4dt}{\cos^2 t} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{4}{\cos t}\cdot\frac{4dt}{\cos^2 t}}{\left(4\frac{\sin t}{\cos t}\right)^3} =$

	$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sin^3 t} = \begin{bmatrix} z = \operatorname{tg}\frac{t}{2} \\ \sin t = \frac{2z}{1+z^2} \\ dt = \frac{2dz}{1+z^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^3} = \frac{1}{16}\int \frac{(1+z^2)^2}{z^3}dz =$ $= \frac{1}{16}\int \frac{1+2z^2+z^4}{z^3}dz = \frac{1}{16}\int \frac{dz}{z^3} + \frac{1}{8}\int \frac{dz}{z} + \frac{1}{16}\int zdz =$ $= -\frac{1}{32z^2} + \frac{1}{8}\ln\lvert z\rvert + \frac{z^2}{32} + C =$ $= -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{32}\left(\mathbf{tg}\frac{t}{2}\right)^2} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}\mathbf{ln}\left\lvert \mathbf{tg}\frac{t}{2}\right\rvert + \frac{\left(z\,\mathbf{tg}\frac{t}{2}\right)^2}{\mathbf{32}} + \boldsymbol{C}$, **де** $\boldsymbol{t} = \mathbf{arctg}\frac{x}{4}$**.**

Тема «ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ»
Властивості визначеного інтегралу

Визначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює сумі інтегралів	$\int_a^b \big(u(x) + v(x) + \cdots + w(x)\big)dx =$ $= \int_a^b u(x)dx + \int_a^b v(x)dx + \cdots + \int_a^b w(x)dx$
Постійний множник можна виносити за знак визначеного інтегралу	$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$
При перестановці границь інтегрування визначеного інтегралу знак визначеного інтегралу змінюється на протилежний	$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
При розбитті інтервалу інтегрування на частини, визначений інтеграл дорівнює сумі інтегралів по кожній з частин	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
Якщо підінтегральна функція в інтервалі інтегрування не змінює знак, то визначений інтеграл є числом того ж знаку, що й підінтегральна функція	Якщо $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, і, навпаки, якщо $f(x) \leq 0$, то $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.
Оцінити величину визначеного інтегралу можна за формулою	$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

ФОРМУЛА НЬЮТОНА – ЛЕЙБНИЦЯ

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

Безпосереднє обчислення визначених інтегралів	Обчислити визначений інтеграл $\int_{-1}^{0}(4x^3+5e^x-7)dx = \left(4\frac{x^4}{4}+5e^x-7x\right)\Big\|_{-1}^{0} =$ $= 5-\left(1+\frac{5}{e}+7\right) = \boldsymbol{\frac{5}{e}-3}$.
	Обчислити визначений інтеграл $\int_2^5 \frac{dx}{x^2-4x+5} = \int_2^5 \frac{dx}{(x-2)^2+1} = \mathrm{arctg}(x-2)\Big\|_2^5 =$ $= \mathrm{arctg}3 - \mathrm{arctg}0 = \mathbf{arctg3}$.
Заміна змінної у визначеному інтегралі $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)dt =$ $= F(\varphi(\alpha)) - F(\varphi(\beta)) =$ $= F(b) - F(a)$	Обчислити визначений інтеграл $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x-1}} = \left[\begin{array}{c} u=\ln x \\ du=\frac{dx}{x} \\ u_н=\ln e=1 \\ u_в=\ln e^2=2 \end{array}\right] = \int_1^2 \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} =$ $= \ln\left\|u+\sqrt{u^2-1}\right\|\Big\|_1^2 = \ln\left\|2-\sqrt{3}\right\| - \ln 1 =$ $= \mathbf{ln}\left\|\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{3}}\right\|$.
	Обчислити визначений інтеграл $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} = \left[\begin{array}{c} z=\mathrm{tg}\frac{x}{2} \\ \cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2} \\ dx=\frac{2dz}{1+z^2} \\ u_н=\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1 \\ u_в=\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1 \end{array}\right] = \int_{-1}^{1} \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1+\frac{1-z^2}{1+z^2}} =$ $= \int_{-1}^{1} \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{1+z^2+1-z^2}{1+z^2}} = \int_{-1}^{1} dz = z\Big\|_{-1}^{1} = 1+1 = \mathbf{2}$.
	Обчислити визначений інтеграл $\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}dx = \left[\begin{array}{c} 1-x=u^3 \\ x=1-u^3 \\ dx=-3u^2du \\ н:\ 1-1=u^3;\ u_н=0 \\ в:\ 1-9=u^3;\ u_в=-2 \end{array}\right] =$ $= -3\int_0^{-2}(1-u^3)u\cdot u^2du = 3\int_{-2}^{0}(u^3-u^6)du =$ $= 3\left(\frac{u^4}{4}-\frac{u^7}{7}\right)\Big\|_{-2}^{0} = 0-3\left(4-\frac{128}{7}\right) = \boldsymbol{\frac{300}{7}}$.

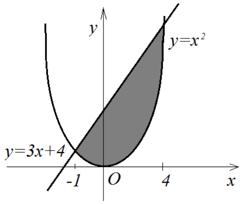
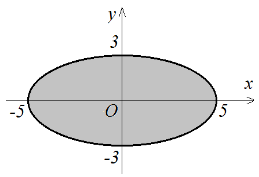
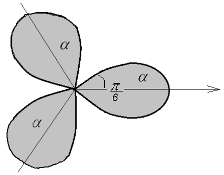
Інтегрування частинами визначених інтегралів $\int_a^b u\cdot dv =$ $= uv\Big\vert_a^b - \int_a^b v\,du$	Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x+4)\sin 3x\,dx =$ $= \left[\begin{matrix} u = x+4 & du = dx \\ dv = \sin 3x\,dx & v = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{matrix}\right] =$ $= -\frac{1}{3}(x+4)\cos 3x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 3x\,dx =$ $= -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}+4\right)\cos\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{3}(0+4)\cos 0 + \frac{1}{9}\sin 3x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{4}} =$ $= \frac{\sqrt{2}}{6}\left(\frac{\pi}{4}+4\right) + \frac{4}{3} + \frac{1}{9}\sin\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{9}\sin 0 =$ $= \frac{\sqrt{2}\pi}{24} + \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{18} = \frac{\sqrt{2}\pi}{24} + \frac{11\sqrt{2}}{18} + \frac{4}{3} =$ $= \boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}\pi+44\sqrt{2}+96}{72}}$.
	Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} x\,\mathrm{arctg}\,2x\,dx = \left[\begin{matrix} u = \mathrm{arctg}\,2x & du = \frac{2dx}{1+4x^2} \\ dv = xdx & v = \frac{x^2}{2} \end{matrix}\right] =$ $= \frac{x^2}{2}\cdot\mathrm{arctg}\,2x\Big\vert_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{arctg}\,1 - 0 -$ $-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(1+4x^2)-1}{1+4x^2}dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}dx + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1+4x^2} =$ $= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}x\Big\vert_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}\mathrm{arctg}\,2x\Big\vert_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cdot\mathrm{arctg}\,1 = \boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$.
	Обчислити визначений інтеграл $\int_{e^2}^{e^3}\ln^2 x\,dx = \left[\begin{matrix} u = \ln^2 x & du = 2\ln x\cdot\frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{matrix}\right] =$ $= x\cdot\ln^2 x\Big\vert_{e^2}^{e^3} - 2\int_{e^2}^{e^3} x\cdot\ln x\cdot\frac{dx}{x} =$ $= \left[\begin{matrix} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & x \end{matrix}\right] = e^3\ln^2 e^3 - e^2\ln^2 e^2 -$ $-2x\cdot\ln x\Big\vert_{e^2}^{e^3} + 2\int_{e^2}^{e^3} x\cdot\frac{dx}{x} = 9e^3 - 4e^2 -$ $-2e^3\ln e^3 + 2e^2\ln e^2 + 2x\Big\vert_{e^2}^{e^3} = 9e^3 - 4e^2 -$ $-6e^3 + 4e^2 + 2e^3 - 2e^2 = \boldsymbol{5e^3 - 2e^2}$.

НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Невласні інтеграли с нескінченими границями $\int_a^\infty f(x)dx =$ $= \lim_{\eta\to\infty} \int_a^\eta f(x)dx =$ $= \lim_{\eta\to\infty} F(\eta) - F(a)$.	Обчислити невласний інтеграл (або встановити його розбіжність) $\int_{\sqrt{3}}^{\infty}\frac{2xdx}{x^4+9} = \int_{\sqrt{3}}^{\infty}\frac{d(x^2)}{(x^2)^2+3^2} = \frac{1}{3}\lim\limits_{\eta\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{x^2}{3}\Big\|_{\sqrt{3}}^{\eta} =$ $= \frac{1}{3}\left(\lim\limits_{\eta\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{\eta^2}{3} - \operatorname{arctg} 1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$. Ми отримали кінцеве значення, отже невласний інтеграл **збігається**.
Невласні інтеграли від розривних функцій $\int_a^b f(x)dx =$ $= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ або $\int_a^b f(x)dx =$ $= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$.	Обчислити невласний інтеграл (або встановити його розбіжність)$\int_{-3}^{0}\frac{dx}{(x+3)^2}$. Підінтегральна функція потерпає розрив на нижній границі. $\int_{-3}^{0}\frac{dx}{(x+3)^2} = -\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x+3}\Big\|_{-3+\varepsilon}^{0} = -\frac{1}{3} + \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{-3+\varepsilon+3} =$ $= -\frac{1}{3} + \infty = \infty$. Ми отримали нескінченність, отже невласний інтеграл **розбігається**.

ДЕЯКІ ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Обчислення площі плоскої фігури

Фігура обмежена лініями, заданими в декартовій системі координат: кривою $y = f(x)$, $x = a$ і $x = b$, і віссю Ox $\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)dx,}$ або лініями $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ $\boldsymbol{S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx}$	Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2,\ \ y = 3x + 4$.  Знайдемо точки перетину ліній $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3x + 4 \end{cases} \Rightarrow$ $x^2 = 3x + 4;$ $x^2 - 3x - 4 = 0; \Rightarrow$ $x_1 = -1, x_2 = 4.$ Обчислимо площу: $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx = \int_{-1}^4 (3x + 4 - x^2)dx =$ $= \left(3\frac{x^2}{2} + 4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big\vert_{-1}^{4} = 24 + 16 - \frac{64}{3} -$ $- \left(\frac{3}{2} - 4 + \frac{1}{3}\right) = \boldsymbol{21\frac{1}{6}}(\text{од}^2)$
Фігура обмежена лініями, заданими параметрично: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\boldsymbol{S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'_t \cdot dt}$	Обчислити площу еліпса $x = 5\cos t\,,\ \ y = 3\sin t$.  Обчислимо похідну $x'_t = -5\sin t$ та підставимо у формулу: $S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'_t \cdot dt =$ $= \int_0^{2\pi} 3\sin t \cdot (-5\sin t)\,dt = -15\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt =$ $= -\frac{15}{2}\int_0^{2\pi}(1 - \cos 2t)dt = -\frac{15}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big\vert_0^{2\pi} =$ $= -15\pi;$ $S = \vert -15\pi \vert = \boldsymbol{15\pi}(\text{од}^2)$
Фігура обмежена лініями, заданими в полярній системі координат $\rho = f(\varphi)$: $\boldsymbol{S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)\,d\varphi}$	Обчислити площу трипелюсткової троянди $\rho = a\cos 3\varphi$.  Фігура симетрична, тому обчислимо площу шостої частини фігури: $\frac{1}{6}S = \frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\varphi\,d\varphi =$ $= \frac{1}{4}a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1 + \cos 6\varphi)d\varphi =$ $= \frac{a^2}{4}\left(\varphi + \frac{1}{6}\sin 6\varphi\right)\Big\vert_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{\pi}{6};\qquad S = \boldsymbol{\frac{a^2}{4} \cdot \pi}(\text{од}^2)$

Обчислення довжини дуги

Лінія задана в декартовій системі координат кривою $y=f(x)$, між точками $x=a$ і $x=b$, і $\boldsymbol{l=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx}$	Обчислити довжину дуги $y=\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ між точками$1\le x\le 9$. Знайдемо похідну та виконаємо необхідні перетворення: $y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x-1}$; $1+(y')^2=1+(x-1)=x$. Підставимо у формулу: $l=\int_1^9\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big\|_1^9=\frac{2}{3}(27-1)=\boldsymbol{17\frac{1}{3}}\,(\text{од.})$
Лінія задана параметрично: $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$, $\boldsymbol{l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt}$	Обчислити довжину дуги астроїди $x=3\cos^3 t\,,\ y=3\sin^3 t$. Знайдемо похідні та виконаємо необхідні перетворення: $x'_t=-3\cdot 3\cos^2 t\cdot\sin t;\ \ y'_t=3\cdot 3\sin^2 t\cdot\cos t$; $(x'_t)^2+(y'_t)^2=$ $=81\cos^4 t\cdot\sin^2 t+81\cos^2 t\cdot\sin^4 t=$ $=81\cos^2 t\cdot\sin^2 t\,(\cos^2 t+\sin^2 t)=$ $=81\cos^2 t\cdot\sin^2 t$ Підставимо у формулу. В силу симетрії лінії, достатньо обчислити чверть лінії, а потім помножити отримане значення на 4. $\frac{1}{4}l=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=$ $=-\frac{9}{4}\cos 2t\Big\|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{9}{4}(\cos\pi-\cos 0)=$ $=-\frac{9}{4}(-1-1)=\frac{9}{2};\,l=4\cdot\frac{9}{2}=\boldsymbol{18}\,(\text{од.})$
Лінія задана в полярній системі координат $\rho=f(\varphi)$: $\boldsymbol{l=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\rho')^2+\rho^2}d\varphi}$	Обчислити довжину дуги $\rho=5\sin^3\frac{\varphi}{3}$ при $0\le\varphi\le\frac{3\pi}{2}$. Знайдемо похідну та виконаємо необхідні перетворення: $\rho'=5\cdot 3\sin^2\frac{\varphi}{3}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}\cdot\frac{1}{3}$; $(\rho')^2+\rho^2=25\sin^6\frac{\varphi}{3}+25\sin^4\frac{\varphi}{3}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{3}=$ $=25\sin^4\frac{\varphi}{3}\left(\sin^2\frac{\varphi}{3}+\cos^2\frac{\varphi}{3}\right)=25\sin^4\frac{\varphi}{3}$. Підставимо у формулу: $l=5\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi=\frac{5}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\left(1+\cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi=$ $=\frac{5}{2}\left(\varphi+\frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Big\|_0^{\frac{3\pi}{2}}=\frac{5}{2}\cdot\frac{3\pi}{2}=\boldsymbol{\frac{15\pi}{4}}\,(\text{од.})$

Обчислення об'єму тіла обертання

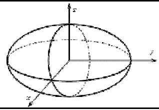
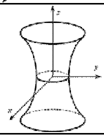
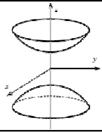
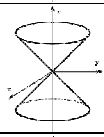
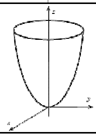
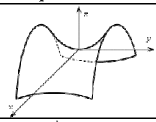
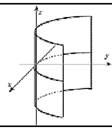
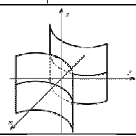
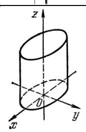
Об'єм тіла обертання навколо осі абсцис: $\boldsymbol{V_x = \pi \int_a^b y^2\,dx}$	Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $x^2 = 4 + y,\ y = 0$ навколо осі абсцис. Перепишемо рівняння лінії у вигляді $y = x^2 - 4$. Знайдемо границі інтегрування, розв'язавши рівняння $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$ Обчислимо об'єм за формулою $V_x = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_{-2}^{2} (x^2 - 4)^2\,dx =$ $= \pi \int_{-2}^{2} (x^4 - 8x^2 + 16)\,dx =$ $= \pi \left(\frac{x^5}{5} - 8\frac{x^3}{3} + 16x\right)\Big\vert_{-2}^{2} =$ $= 2\pi \left(\frac{x^5}{5} - 8\frac{x^3}{3} + 16x\right)\Big\vert_{0}^{2} =$ $= 2\pi \left(\frac{2^5}{5} - 8\frac{2^3}{3} + 16 \cdot 2\right) = \boldsymbol{\frac{128}{5}\pi = 25{,}6\pi}$(од^3).
Об'єм тіла обертання навколо осі ординат: $\boldsymbol{V_y = \pi \int_c^d x^2\,dy}$	Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y^2 = 4x,\ x^2 = 4y$ навколо осі ординат. Знайдемо границі інтегрування, розв'язавши рівняння $\begin{cases} y^2 = 4x \\ x^2 = 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^4 = 16x^2 \\ x^2 = 4y \end{cases} \Rightarrow\ y^4 = 16 \cdot 4y$ $y^4 - 64y = 0;\ \ y(y^3 - 64) = 0;\ \ y_1 = 0;\ y_2 = 4.$ Об'єм шуканої фігури є різниця об'ємів двох фігур, утворених обертанням парабол навколо осі ординат: $V_y = V_{y_2} - V_{y_1}$. Обчислимо об'єми за формулою $V_{y_1} = \pi \int_0^4 \left(\frac{y^2}{4}\right)^2 dy = \frac{\pi}{16} \int_0^4 y^4\,dy = \frac{\pi}{16}\frac{y^5}{5}\Big\vert_0^4 = \frac{64}{5}\pi;$ $V_{y_2} = \pi \int_0^4 4y\,dy = 4\pi \frac{y^2}{2}\Big\vert_0^4 = 32\pi.$ Остаточно маємо $V_y = V_{y_2} - V_{y_1} = 32\pi - \frac{64}{5}\pi = \boldsymbol{\frac{96}{5}\pi = 19{,}2\pi}$(од^3)

Обчислення площі поверхні тіла обертання

Площа поверхні тіла обертання навколо осі Ox: $\boldsymbol{Q_x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx}$	Обчислити площу катеноїди – поверхні, утвореної обертанням цепної лінії $y=\frac{3}{2}\left(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}\right)$ навколо осі $Ox(0\le x\le 3)$. Знайдемо похідну та виконаємо необхідні перетворення: $y'=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}-\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{3}}-e^{-\frac{x}{3}}\right);$ $1+(y')^2=1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{3}}-e^{-\frac{x}{3}}\right)^2=$ $=1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{3}}-2e^{\frac{x}{3}}e^{-\frac{x}{3}}+e^{-\frac{2x}{3}}\right)=$ $=1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{3}}-2+e^{-\frac{2x}{3}}\right)=\frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{3}}+2+e^{-\frac{2x}{3}}\right)=$ $=\left(\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}\right)\right)^2;$ підставимо у формулу $Q_x=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx=$ $=2\pi\int_0^3\frac{3}{2}\left(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}\right)dx=$ $=\frac{3\pi}{2}\int_0^3\left(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}\right)^2dx=\frac{3\pi}{2}\int_0^3\left(e^{\frac{2x}{3}}+2+e^{-\frac{2x}{3}}\right)dx$ $=\frac{3\pi}{2}\left(\frac{3}{2}e^{\frac{2x}{3}}+2x-\frac{3}{2}e^{-\frac{2x}{3}}\right)\Big\|_0^3=$ $=\frac{3\pi}{2}\left(\frac{3}{2}e^2+6-\frac{3}{2}e^{-2}\right)-\frac{3\pi}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right)=$ $=\boldsymbol{\frac{9\pi}{4}\left(e^2-e^{-2}+2\right)}(\text{од}^2)$
Площа поверхні тіла обертання навколо осі Oy: $\boldsymbol{Q_y = 2\pi\int_c^d x\sqrt{1+(x')^2}dy}$	Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кубічної параболи $3x-y^3=0$ навколо осі $Oy(0\le y\le 3)$. Знайдемо похідну та виконаємо необхідні перетворення: $x=\frac{1}{3}y^3;\quad x'=y^2;\quad 1+(x')^2=1+y^4;$ підставимо у формулу $Q_y=2\pi\int_c^d x\sqrt{1+(x')^2}dy=$ $=2\pi\int_0^3\frac{1}{3}y^3\sqrt{1+y^4}dy=\begin{bmatrix}u=1+y^4\\ du=4y^3dy\\ y^3dy=\frac{1}{4}du\\ u_{\text{н}}=1+0=1\\ u_{\text{в}}=1+3^4=82\end{bmatrix}=$ $=\frac{2\pi}{3\cdot 4}\int_1^{82}\sqrt{u}\,du=\frac{\pi}{9}u\sqrt{u}\Big\|_1^{82}=\boldsymbol{\frac{\pi}{9}\left(82\sqrt{82}-1\right)}$

Тема «ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ»

Поверхні другого порядку

Еліпсоїд $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$	
Однопорожнинний гіперболоїд $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$	
Двопорожнинний гіперболоїд $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$	
Конус $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$	
Еліптичний параболоїд $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$	
Гіперболічний параболоїд $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$	
Параболічний циліндр $$y^2=2px$$	
Гіперболічний циліндр $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$	
Еліптичний циліндр $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$	

Частинні похідні та диференціали. Повний диференціал функції

$\boldsymbol{z=f(x,y)}$ ***Частинною похідною*** по x від функції $z=f(x,y)$ називається функція змінних x і y, отримана при диференціюванні $f(x,y)$по x, при припущенні, що y є сталою величиною. $\boldsymbol{f'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}}$ ***Частинною похідною*** по y від функції $z=f(x,y)$ називається функція змінних x і y, отримана при диференціюванні $f(x,y)$по x, при припущенні, що x є сталою величиною. $\boldsymbol{f'_y=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}}$	Знайти частинні похідні функції $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$. $z'_x=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x=$ $=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=$ $=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}$; $z'_y=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)'_y=$ $=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=$ $=\boldsymbol{\frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}}$.
Частинні диференціали $\boldsymbol{d_xz=\frac{\partial z}{\partial x}dx}$; $\boldsymbol{d_yz=\frac{\partial z}{\partial y}dy}$	Знайти частинні диференціали функції $z=\mathrm{arctg}\frac{x}{y}$. Обчислимо частинні похідні $z'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2}$; $z'_y=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y=\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{x^2+y^2}$; та підставимо у формули $d_xz=\frac{\partial z}{\partial x}dx=\boldsymbol{\frac{y\cdot dx}{x^2+y^2}}$; $d_yz=\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\boldsymbol{\frac{x\cdot dy}{x^2+y^2}}$.
Повний диференціал функції $\boldsymbol{dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy}$	Знайти повний диференціал функції $z=(1+4x^2)^{y^3}$. Для цього знайдемо частинні похідні $z'_x=y^3(1+4x^2)^{y^3-1}\cdot(1+4x^2)'_x=$ $=8xy^3(1+4x^2)^{y^3-1}$; $z'_y=(1+4x^2)^{y^3}\cdot\ln(1+4x^2)\cdot(y^3)'_y=$ $=3y^2(1+4x^2)^{y^3}\cdot\ln(1+4x^2)$ та підставимо у формулу $\boldsymbol{dz=8xy^3\left(1+4x^2\right)^{y^3-1}dx+}$ $\boldsymbol{+3y^2\left(1+4x^2\right)^{y^3}\cdot\ln\left(1+4x^2\right)dy}$

Частинні похідні складних функцій

Частинні похідні складних функцій $\boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}$; $\boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}}$	Знайти частинні похідні складної функції $z=u^2v-uv^2$, де$u=x\cos y$, $v=y\sin x$та обчислити їх значення в точці $M\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Знайдемо необхідні частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial u}=2uv-v^2;\quad \frac{\partial z}{\partial v}=u^2-2uv;$ $\frac{\partial u}{\partial x}=\cos y;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-x\sin y;$ $\frac{\partial v}{\partial x}=y\cos x;\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\sin x;$ та скористаємося формулами $\frac{\partial z}{\partial x}=(2uv-v^2)\cdot\cos y+(u^2-2uv)\cdot y\cos x=$ $=\boldsymbol{\left(2xy\sin x\cos y-y^2\sin^2 x\right)\cdot\cos y+}$ $\boldsymbol{+\left(x^2\cos^2 y-2xy\sin x\cos y\right)\cdot y\cos x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=(2uv-v^2)\cdot(-x\sin y)+(u^2-2uv)\cdot\sin x$ $=\boldsymbol{-\left(2xy\sin x\cos y-y^2\sin^2 x\right)\cdot x\sin y+}$ $\boldsymbol{+\left(x^2\cos^2 y-2xy\sin x\cos y\right)\cdot\sin x}$. Обчислимо значення частинних похідних в точці$M\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$: $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right\|_M=\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin^2\frac{\pi}{2}\right)\cdot$ $\cdot\cos\frac{\pi}{2}+\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos^2\frac{\pi}{2}-2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}\right)\cdot$ $\cdot\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}=\mathbf{0}$; $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right\|_M=-\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin^2\frac{\pi}{2}\right)\cdot$ $\cdot\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos^2\frac{\pi}{2}-2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\right)\cdot$ $\cdot\sin\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{\frac{\pi^3}{8}}$.

Похідні функції, заданої неявно

Для функції $F(x,y,z)=0$ частинні похідні обчислюються за формулами $\boldsymbol{z'_x=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}}$; $\boldsymbol{z'_y=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}}$.	Знайти частинні похідні функції $xe^y+ye^x-(x+y)z^2=0$та обчислити їх значення в точці $M(0;1;2)$. Знайдемо F'_x, F'_y, F'_z: $F'_x=e^y+ye^x-z^2$; $F'_y=xe^y+e^x-z^2$; $F'_z=-2(x+y)z$; та підставимо в формули $z'_x=\boldsymbol{\frac{e^y+ye^x-z^2}{2(x+y)z}}$; $z'_y=\boldsymbol{\frac{xe^y+e^x-z^2}{2(x+y)z}}$. Обчислимо частинні похідні в точці $M(0;1;2)$: $z'_x\Big\|_M=\frac{e+1-4}{2\cdot1\cdot2}=\boldsymbol{\frac{e-3}{4}}$; $z'_y\Big\|_M=\frac{0+1-4}{2\cdot1\cdot2}=-\boldsymbol{\frac{3}{4}}$.

Частинні похідні вищих порядків

Частинні похідні другого порядку для функції двох змінних обчислюються за формулами $\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}}$; $\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}}$; $\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}}$; $\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}}$; при цьому мішані похідні не залежать від порядку диференціювання, тобто $\boldsymbol{z''_{xy}=z''_{yx}}$.	Знайти частинні похідні другого порядку функції $z=\frac{x+y}{x-y}$. Переконатися, що $z''_{xy}=z''_{yx}$. Знайдемо частинні похідні першого порядку: $z'_x=\frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot1}{(x-y)^2}=-\frac{2y}{(x-y)^2}$; $z'_y=\frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot(-1)}{(x-y)^2}=\frac{2x}{(x-y)^2}$. За формулами знайдемо частинні похідні другого порядку: $z''_{xx}=-2\cdot\frac{(-2y)}{(x-y)^3}=\boldsymbol{\frac{4y}{(x-y)^3}}$; $z''_{xy}=-\frac{2\cdot(x-y)^2-2y\cdot2(x-y)\cdot(-1)}{(x-y)^4}=$ $=-\frac{2(x-y)(x-y+2y)}{(x-y)^4}=-\boldsymbol{\frac{2(x+y)}{(x-y)^3}}$; $z''_{yx}=\frac{2\cdot(x-y)^2-2x\cdot2(x-y)}{(x-y)^4}=$ $=\frac{2(x-y)(x-y-2x)}{(x-y)^4}=-\boldsymbol{\frac{2(x+y)}{(x-y)^3}}$; $z''_{yy}=-2\cdot\frac{2x}{(x-y)^3}=-\boldsymbol{\frac{4x}{(x-y)^3}}$. Дійсно, $\boldsymbol{z''_{xy}=z''_{yx}}$.

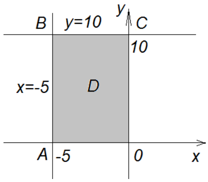
Знаходження функції по її повному диференціалу

$\boldsymbol{du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy}$ є повним диференціалом, якщо $\boldsymbol{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}$. $\boldsymbol{\varphi(y) = \int\left[Q(x,y) - -\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right]dy}$ або $\boldsymbol{\varphi(x) = \int\left[P(x,y) - -\frac{\partial}{\partial x}\int Q(x,y)dy\right]dx}$	Перевірити, чи є даний вираз $\frac{x+2y}{(x+y)^2}dx + \frac{y}{(x+y)^2}dy$ повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію по її повному диференціалу. Тут $P(x,y) = \frac{x+2y}{(x+y)^2}$, $Q(x,y) = \frac{y}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2(x+y)^2-(x+2y)2(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{2(x+y)(x+y-x-2y)}{(x+y)^4} = = -\frac{2y}{(x+y)^3}$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2y}{(x+y)^3}$, тобто $\boldsymbol{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}$, а тому заданий вираз **є повним диференціалом функції**. Знайдемо її. Маємо 1) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x+2y}{(x+y)^2}$; 2) $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{(x+y)^2}$. З першої умови інтегруванням по x знаходимо $u = \int \frac{x+2y}{(x+y)^2}dx + \varphi(y) = \int \frac{(x+y)+y}{(x+y)^2}dx + \varphi(y) =$ $= \int \frac{dx}{x+y} + y\int \frac{dx}{(x+y)^2} + \varphi(y) =$ $= \ln(x+y) - \frac{y}{x+y} + \varphi(y)$. Продиференцюємо отриманий вираз по змінній y та задовільним умові 2: $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x+y} - \frac{x+y-y}{(x+y)^2} + \varphi'^{(y)} = \frac{x+y-x}{(x+y)^2} + \varphi'^{(y)} =$ $= \frac{y}{(x+y)^2} + \varphi'(y)$; звідси $\varphi'(y) = \frac{y}{(x+y)^2} - \frac{y}{(x+y)^2} = 0.$ Отже, доданки, що містять змінну x, зникли, $\varphi'(y) = 0$. Відомо, що похідна від константи дорівнює нулю, тому $\varphi(y) = C$. Остаточно маємо $\boldsymbol{u = \ln(x+y) - \frac{y}{x+y} + C}$.

Екстремум функції двох змінних

$z = f(x, y)$ Необхідні умови екстремуму: $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right\|_{x = x_0, y = y_0} = 0,$ $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right\|_{x = x_0, y = y_0} = 0.$ Достатні умови екстремуму: позначивши $A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right\|_{M(x_o, y_o)}$; $B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right\|_{M(x_o, y_o)}$; $C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right\|_{M(x_o, y_o)}$, маємо умови існування 1) **максимуму**, якщо $\boldsymbol{A \cdot C - B^2} > 0$ і $\boldsymbol{A} < 0$; 2) **мінімуму**, якщо $\boldsymbol{A \cdot C - B^2} > 0$ і $\boldsymbol{A} > 0$; 3) **ні максимуму, ні мінімуму**, якщо $\boldsymbol{A \cdot C - B^2} < 0$; 4) **невизначеності** (потрібні додаткові дослідження), якщо $\boldsymbol{A \cdot C - B^2 = 0}$.	Дослідити функцію $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$ на екстремум. Знайдемо стаціонарні точки, виконав необхідні умови існування екстремуму. $z'_x = 4 - 2x$ $z'_y = -4 - 2y$ $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4 - 2x = 0 \\ -4 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}.$ Отже, стаціонарна точка має координати $M(2; -2)$. Знайдемо частинні похідні другого порядку: $z''_{xx} = -2; \quad z''_{xy} = 0; \quad z''_{yy} = -2.$ Отримані вирази для частинних похідних другого порядку не залежать від x та y, тому $A = -2; \; B = 0; \; C = -2.$ Обчислимо квадратичну форму, маємо $A \cdot C - B^2 = -2 \cdot (-2) - 0^2 = 4 > 0; \quad A < 0.$ В точці M виконується умова існування максимуму. Обчислимо значення функції в точці максимуму: $\boldsymbol{z_{max}} = z\Big\|_M = 4\big(2 - (-2)\big) - 2^2 - (-2)^2 = \mathbf{8}.$

Найбільше та найменше значення функції

<table>
<tr>
<td>Для того, щоб знайти найбільше або найменше значення функції $z = f(x, y)$ в замкненій області, необхідно знайти всі екстремуми функції всередині області, а також найбільші та найменші значення функції на межі області. Найбільше зі всіх цих значень й буде шуканим найбільшим значенням функції в замкненій області, а, відповідно, найменше – найменшим</td>
<td>Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в області D, обмеженої лініями $x = 0;\ \ y = 0;\ \ x = -5;\ y = 10$.


Побудуємо область D.
Область визначення функції – вся координатна площина, тобто $x, y \in R$.
Розв’яжемо задачу на екстремум всередині області D.
Знайдемо частинні похідні та прирівняємо їх до нуля:
$$z'_x = 2x + 2y - 4,\quad z'_y = 2x + 8 \Rightarrow \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} 2x + 2y - 4 = 0 \\ 2x + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = -4 \end{cases}$$
Звідси отримаємо стаціонарну точку $M_1(-4; 6)$;. Ця точка належать області D. Знайдемо стаціонарні точки на межі області D.
Розглянемо лінію $x = 0\ (0 \le y \le 10)$: $z = 0,\ z'_y = 0$. На цій лінії стаціонарних точок немає.
Розглянемо лінію $y = 0\ (-5 \le x \le 0)$: $z = 0,\ z'_x = 0$. На цій лінії стаціонарних точок теж немає.
Розглянемо лінію $x = -5\ (0 \le y \le 10)$:
$z = (-5)^2 + 2(-5)y - 4(-5) + 8y = -2y + 45;$
$z'_y = -2;\quad z'_x \ne 0. \Rightarrow$
Отже на цій лінії стаціонарних точок теж немає.
Розглянемо лінію $y = 10\ (-5 \le y \le 0)$:
$z = x^2 + 2x \cdot 10 - 4x + 8 \cdot 10 = x^2 + 16x + 80;$
$z'_x = 2x + 16;\quad z'_x = 0;\quad x = -8.\quad \Rightarrow$
Точка $M_2(-8; 5)$ не належить області D.
Обчислимо значення функції в стаціонарній точці та в кутових точках області D:
$z\Big|_{M_1} = (-4)^2 + 2(-4)6 - 4(-4) + 8 \cdot 6 = 32;$
$z\Big|_{O(0;0)} = 0;$
$z\Big|_{A} = (-5)^2 + 2(-5)0 - 4(-5) + 8 \cdot 0 = 45;$
$z\Big|_{B} = 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot 10 - 4 \cdot 0 + 8 \cdot 10 = 80.$
Обираємо серед обчислених значень найбільше та найменше. Отже найбільше значення функція набуває в точці $B(0; 10)$: $\boldsymbol{z\Big|_{B} = 80}$, а найменше – в точці $O(0; 0)$: $\boldsymbol{z\Big|_{0} = 0}$.</td>
</tr>
</table>

Дотична площина та нормаль до поверхні

Рівняння дотичної площини $\boldsymbol{F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0}$	Записати рівняння дотичної площини до поверхні $x^2+y^2+z^2-2x+10z-13=0$ у точці$M(2;1;3)$. Знайдемо частинні похідні $F'_x=2x-2;$ $F'_y=2y;$ $F'_z=2z+10;$ та обчислимо їх значення у точці $F'_x(M_0)=2\cdot 2-2=2;$ $F'_y(M_0)=2\cdot 1=2;$ $F'_z(M_0)=2\cdot 3+10=16;$ за формулою маємо рівняння **дотичної площини** $2(x-2)+2(y-1)+16(z-3)=0$ або $\boldsymbol{2x+2y+16z-54=0}$.
Рівняння нормалі до поверхні $\boldsymbol{\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}}$	Записати рівняння нормалі до поверхні $3x^2-2xy+4xz-5y+16=0$в точці$M(1;-1;4)$. Знайдемо частинні похідні $F'_x=6x-2y+4z;$ $F'_y=-2y-5;$ $F'_z=4x;$ та обчислимо їх значення у точці $F'_x(M_0)=6\cdot 1-2\cdot(-1)+4\cdot 4=24;$ $F'_y(M_0)=-2\cdot(-1)-5=-3;$ $F'_z(M_0)=4\cdot 1=4;$ за формулою маємо рівняння **нормалі до поверхні** $\boldsymbol{\frac{x-1}{24}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-4}{4}}$.

Похідна за напрямком. Градієнт

<table>
<tr>
<td>Похідна за напрямком
$\frac{\partial u}{\partial l} =$
$= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$</td>
<td rowspan="2">Для функції $u = 3x^2yz - 2xy^2z + yz^2$ знайти модуль градієнта у точці $M_0(2,1,2)$ та похідну в точці M_0 за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{M_0M_1}$, якщо $M_1(3;-4;1)$.
Знайдемо частинні похідні функції u:
$\frac{\partial u}{\partial x} = 6xyz - 2y^2z;$
$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2z - 3xyz + z^2;$
$\frac{\partial u}{\partial z} = 3x^2y - 2xy^2 + 2yz.$
Обчислимо їх значення в точці M_0:
$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 20;$
$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = 16;$
$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 24.$
Отже **градієнт** у точці M_0
$\mathbf{grad}\, \boldsymbol{u} = \mathbf{20} \cdot \vec{\boldsymbol{i}} + \mathbf{16} \cdot \vec{\boldsymbol{j}} + \mathbf{24} \cdot \vec{\boldsymbol{k}},$
а його модуль
$\lvert \mathbf{grad}\, \boldsymbol{u} \rvert = \sqrt{20^2 + 16^2 + 24^2} = \mathbf{4\sqrt{77}.}$

Координати вектора $\vec{l} = \overrightarrow{M_0M_1} = (1;-5;-1)$, його модуль
$$\lvert\vec{l}\rvert = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{27},$$
звідси напрямні косинуси приймають значення
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{27}};\quad \cos\beta = \frac{-5}{\sqrt{27}};\quad \cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{27}}.$$

Отже, **похідна за напрямом вектора** дорівнює
$\frac{\partial u}{\partial l} = 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{27}} + 16 \cdot \left(\frac{-5}{\sqrt{27}}\right) + 24 \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{27}}\right) = -\mathbf{\frac{84}{\sqrt{27}}.}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Градієнт
$\mathbf{grad}\, \boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \vec{\boldsymbol{i}} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}} \cdot \vec{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{z}} \cdot \vec{\boldsymbol{k}}$</td>
</tr>
</table>

Тема «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ»
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ
Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Якщо рівняння має диференціальний вигляд $f(x,y)dx+g(x,y)dy=0$, і може бути записано як добуток $\boldsymbol{f_1(x)\cdot f_2(y)dx+}$ $\boldsymbol{+g_1(x)\cdot g_2(y)dy=0}$, поділивши його на $g_1(x)\cdot f_2(y)$, отримаємо $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx+\frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy=0$. Проінтегрував його, отримаємо загальний розв'язок $\boldsymbol{\int\frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx+\int\frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy=C}$	Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$. Відокремимо змінні $x(y^2+1)dx+y(1-x^2)dy=0$; $x(y^2+1)dx=-y(1-x^2)dy$; або $x(y^2+1)dx=y(x^2-1)dy\|:(y^2+1);\ (x^2-1)$ Маємо рівняння $\frac{x}{x^2-1}dx=\frac{y}{y^2+1}$, проінтегруємо $\int\frac{x}{x^2-1}dx=\int\frac{y}{y^2+1}dy;\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-1)}{x^2-1}=\frac{1}{2}\int\frac{d(y^2+1)}{y^2+1}$; $\frac{1}{2}\ln(y^2+1)=\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+C$; або $\frac{1}{2}\ln(y^2+1)=\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+\frac{1}{2}\ln C$; $\ln(y^2+1)=\ln C(x^2-1)$; $\boldsymbol{y^2+1=C(x^2-1)}$.

Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Рівняння першого порядку називається **однорідним**, якщо воно може бути представлено у вигляді $\boldsymbol{y'=g\left(\frac{y}{x}\right)}$. Рівняння$y'=f(x,y)$ називається **однорідним**, якщо при заміні $x\to kx;\quad y\to ky;$ $dx\to kdx;\quad dy\to kdy;$ $y'\to y'$ рівняння не змінюється. Однорідне зводиться до рівняння з відокремлю-ваними змінними за допомогою **підстановки** $\boldsymbol{y=u\cdot x;\quad y'=u'\cdot x+u}$	Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'=\frac{x+y}{x-y}$. Перевіримо, чи буде це рівняння однорідним рівнянням першого порядку. Для цього замінимо $x\to kx;\quad y\to ky;\quad y'\to y'$, маємо $y'=\frac{kx+ky}{kx-ky}$; $\quad y'=\frac{k(x+y)}{k(x-y)}$. Бачимо, що k всюди скорочується, тому воно є однорідним рівнянням. Виконаємо підстановку $y=ux;y'=u'x+u$:$\Rightarrow\boldsymbol{u'x+u=\frac{x+ux}{x-ux}}$. Скоротимо та виконаємо необхідні перетворення: $u'x+u=\frac{1+u}{1-u};u'x=\frac{1+u}{1-u}-u;\quad u'x=\frac{1+u^2}{1-u}$. Ми отримали рівняння з відокремлюваними змінними:$\frac{1-u}{(1+u^2)}du=\frac{dx}{x}$. Проінтегруємо даний вираз, маємо $\operatorname{arctg}u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln Cx$. Повернемося до початкових змінних. Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння: $\boldsymbol{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)=\ln Cx}$.

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння називається **лінійним**, якщо воно лінійно відносно шуканої функції та її похідної: $\boldsymbol{y' + p(x)y = q(x)}$. Розв'язок шукаємо у вигляді $\boldsymbol{y = uv}$; $\boldsymbol{y' = u'v + uv'}$ Після підстановки маємо: $u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$. Дорівняємо вираз у дужках до нуля: $\boldsymbol{v' + p(x)v = 0}$, а звідси $\boldsymbol{u'v = q(x)}$. Отже лінійне рівняння зводиться до **двох** диференціальних рівнянь **з відокремлюваними змінними**.	Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $xy' - \frac{y}{x+1} = x$, яке задовольняє умові $y(1) = 0$. Задане рівняння є лінійним, тому що шукана функція та її похідна входять у рівняння в першій степені. Перепишемо рівняння у зручному вигляді. Для цього поділимо рівняння на x: $$y' - \frac{y}{x(x+1)} = 1.$$ Будемо шукати розв'язок у вигляді $y = uv$; $y' = u'v + uv'$: $$u'v + uv' - \frac{uv}{x(x+1)} = 1;$$ $$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x(x+1)}\right) = 1.$$ Дорівняємо вираз у дужках до нуля, і розв'яжемо диференціальне з відокремлюваними змінними відносно v: $$v' - \frac{v}{x(x+1)} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x(x+1)} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x^2+x};$$ $$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x^2+x} \quad \Rightarrow \quad \ln v = \ln \frac{x}{x+1}$$ Отже, функція v є вигляд:$\boldsymbol{v = \frac{x}{x+1}}$. Повернемося до рівняння. З урахуванням рівності нулю виразу в дужках, маємо: $$u'v = 1.$$ Підставимо знайдену функцію v, розв'яжемо отримане рівняння з відокремлюваними змінними відносно функції u: $$u' \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x+1}} = 1 \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{x+1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{x+1}{x} \Rightarrow$$ $$du = \frac{x+1}{x}dx; \int du = \int \frac{x+1}{x}dx.$$ Отже, функція u є вигляд: $u = x + \ln x + C$. **Загальний розв'язок** диференціального рівняння знаходимо як добуток функцій u і v: $$\boldsymbol{y = uv = (x + \ln x + C) \cdot \frac{x}{x+1}};$$ Знайдемо частинний розв'язок, для цього скористаємося початковими умовами та визначимо коефіцієнт C: $$y(1) = 0 \Rightarrow 0 = (0 + \ln 1 + C) \cdot \frac{1}{1+1} \Rightarrow \boldsymbol{C = 0}.$$ Підставимо значення коефіцієнта C, маємо: $$\boldsymbol{y = \frac{x(x + \ln x)}{x+1}}.$$

Рівняння Бернуллі

Диференціальне рівняння виду	Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$.
$y' + p(x)y = q(x)y^n$ називається **рівнянням Бернуллі**. За допомогою підстановки $\boldsymbol{z = y^{1-n}}$ воно зводиться до **лінійного** диференціального рівняння першого порядку	Перепишемо рівняння у вигляді $y' + \frac{y}{x+1} = -y^2$. Задане рівняння – це рівняння **Бернуллі** з $n = 2$. Поділимо рівняння на y^2 і введемо нову змінну $z = y^{1-2} = y^{-1}$: $\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y(x+1)} = -1$ або $y' \cdot y^{-2} + \frac{1}{(x+1)} y^{-1} = -1$; $z = y^{-1} \quad \Rightarrow \quad z' = -y^{-2} \cdot y$. Маємо **лінійне** рівняння: $-z' + \frac{1}{(x+1)} z = -1 \quad$ або $\quad z' - \frac{1}{(x+1)} z = 1$. Розв'яжемо його за допомогою підстановки: $z = uv; \quad z' = u'v + uv'$; $u'v + uv' - \frac{1}{(x+1)} uv = 1$; $u'v + u\left(v' - \frac{1}{(x+1)} v\right) = 1$. Наше рівняння розпадається на два рівняння з відокремленими змінними. Знайдемо функцію v: $v' - \frac{1}{(x+1)} v = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dx} = \frac{1}{(x+1)} v \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x+1}$; $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x+1} \;\Rightarrow\; \ln v = \ln(x+1) \;\Rightarrow$ $\boldsymbol{v = x + 1}$. Повернемося до рівняння та знайдемо функцію u: $u'v = 1\,; \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{v}; \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x+1}$. Проінтегруємо отриманий вираз: $\boldsymbol{u = \int \frac{dx}{x+1} = \ln(x+1) + C}$. Отже, проміжна функція z має вигляд: $z = (\ln(x+1) + C) \cdot (x+1) =$ $= (x+1)\ln(x+1) + C(x+1)$. Повернемося до шуканої функції, отримаємо загальний розв'язок диференціального рівняння: $\frac{1}{y} = (x+1)\ln(x+1) + C(x+1)$ або $\boldsymbol{y = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1) + C(x+1)}}$.

Рівняння у повних диференціалах

$\boldsymbol{P(x,y)dx+Q(x,y)dy}$ є повним диференціалом, якщо виконується умова $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$ інтегрування рівняння $\boldsymbol{P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0}$ зводиться до знаходження первісної від лівої частини рівняння у вигляді: $$\boldsymbol{\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+}$$ $$\boldsymbol{+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy=C}$$	Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $e^y dx+(xe^y-2y)dy=0$. Перевіримо, чи є задане рівняння рівнянням у повних диференціалах. Для цього випишемо функції P і Q та продиференцюємо їх: $P(x,y)=e^y$; $\quad Q(x,y)=xe^y-2y$; $\frac{\partial P}{\partial y}=e^y$; $\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=e^y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Перевірка показала, що рівняння є **рівнянням у повних диференціалах**. Проінтегруємо його. У якості довільної точки (x_0,y_0) оберемо точку $(0,0)$ (область визначення функції це дозволяє: $$\int_0^x e^y dx+\int_0^y 2ydy=C;$$ $$e^y\Big\|_0^x+y^2\Big\|_0^y=C$$ Остаточно маємо: $\boldsymbol{e^y+y^2=C}$.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Диференціальні рівняння вищого порядку, що допускають пониження порядку

Рівняння **не містить шуканої функції**, та її похідної: $\boldsymbol{y''=f(x,y')}$або$\boldsymbol{y^{(n)}=f\left(x,y^{(n-1)}\right)}$. За допомогою підстановок $\boldsymbol{y'=z,\quad y''=z'}$ або $\boldsymbol{y^{(n-1)}=z,\quad y^{(n)}=z'}$ зводяться до диференціальних рівнянь першого порядку відносно нової шуканої функції z.	Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $2xy'y''=(y')^2+1$. Маємо диференціальне рівняння другого порядку, що не містить шуканої функції. Для розв’язання скористаємося підстановкою: $y'=z,\quad y''=z'$; $2xzz'=z^2+1$. Отримали диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними, розв’яжемо його: $2xz\frac{dz}{dx}=z^2+1 \quad \vert\cdot dx$; $2xzdz=(z^2+1)dx \quad \left\vert\begin{array}{l}:x\\:(z^2+1)\end{array}\right.$; $\int\frac{2zdz}{z^2+1}=\int\frac{dx}{x}$; $\ln(z^2+1)=\ln x+\ln C_1 \Rightarrow \ln(z^2+1)=\ln(C_1x)$; $z^2+1=C_1x$; $z=\pm\sqrt{C_1x-1}$. Пригадаємо, що $y'=z$; проінтегруємо, отримаємо загальний розв’язок $\boldsymbol{y=\pm\int\sqrt{C_1x-1}dx=\pm\frac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1x-1)^3}+C_2}$.

Рівняння **не містить незалежної змінної**: $y'' = f(y, y')$. За допомогою підстановок $\boldsymbol{y' = p, \quad y'' = p\frac{dp}{dy}}$ зводяться до диференціальних рівнянь першого порядку відносно нової шуканої функції p	Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $2(y')^2 = y''(y-1)$, що задовольняє умовам $y(1) = 2,\ y'(1) = -1$. Для розв'язання скористаємося підстановкою: $y' = p, \quad y'' = p\frac{dp}{dy}$. $2p^2 = p\frac{dp}{dy}(y-1)$. Отримали диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними, розв'яжемо його. По-перше, винесемо за дужки p, звідси перший розв'язок: $p = 0; \quad \Rightarrow \quad y' = 0; \quad \Rightarrow \quad y = C$. Скористаємося початковою умовою $y(1) = 2$, маємо $\boldsymbol{y = 2}$. Рівняння, яке залишилося – з відокремлюваними змінними: $\frac{dp}{dy}(y-1) = 2p \vert \cdot dy$; $(y-1)dp = 2pdy \left\vert \begin{matrix} :(y-1) \\ :p \end{matrix} \right.$; $\int \frac{dp}{p} = 2\int \frac{dy}{y-1}$; $\ln p = 2\ln(y-1) + \ln C_1$; або $\ln p = \ln(C_1(y-1)^2)$; $p = C_1(y-1)^2$; пригадаємо, що $y' = p$ $y' = C_1(y-1)^2$. Скористаємося початковими умовами: $-1 = C_1(2-1)^2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -1$. Маємо диференціальне рівняння першого порядку. Проінтегруємо його: $y' = -(y-1)^2$; $\frac{dy}{dx} = -(y-1)^2$; $\int \frac{dy}{(y-1)^2} = -\int dx$; $-\frac{1}{y-1} = -x - C_2$ або $\frac{1}{y-1} = x + C_2$. Скористаємося початковими умовами: $\frac{1}{2-1} = 1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1$ Частинний розв'язок диференціального рівняння має вигляд $\frac{1}{y-1} = x + 1$ або $y - 1 = \frac{1}{x+1}$; $y = \frac{1}{x+1} + 1; \qquad \boldsymbol{y = \frac{x+2}{x+1}}$.

ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ІЗ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (ЛОДР)

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

Для отримання характеристичного рівняння виконаємо заміну

$$y \to 1; \quad y' \to k; \quad y'' \to k^2.$$

Загальний розв’язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами

Дискримінант характеристичного рівняння	Корені характеристичного рівняння	Загальний розв’язок ЛОДР
$D > 0$	$k_1 \neq 0;\ k_2 \neq 0$	$y_o = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$
	$k_1 = -k_2 = k$	$y_o = C_1e^{kx} + C_2e^{-kx}$
	$k_1 = 0;\ k_2 \neq 0$	$y_o = C_1 + C_2e^{k_2x}$
$D = 0$	$k_1 = k_2 = k$	$y_o = (C_1 + C_2x)e^{kx}$
$D < 0$	$k_{1,2} = \pm\beta i$	$y_o = C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x$
	$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y_o = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

$D > 0; \quad k_1 \neq 0;\ k_2 \neq 0$	$y'' + 4y' + 3y = 0;$ Замінимо $y \to 1; \quad y' \to k; \quad y'' \to k^2.$ Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 + 4k + 3 = 0.$ Розв’яжемо його $D = 4^2 - 4\cdot 1\cdot 3 = 4 > 0;$ $k_{1,2} = \dfrac{-4 \pm 2}{2\cdot 1} = \left[\begin{matrix}\mathbf{-1}\\ \mathbf{-3}\end{matrix}\right.$ за таблицею маємо загальний розв’язок ЛОДР $\boldsymbol{y_0 = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}}$

$D > 0;\quad k_1 = -k_2 = k$	$y'' - 25y = 0;$ Замінимо $y \to 1;\quad y'' \to k^2.$ Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 - 25 = 0.$ Розв'яжемо його $k^2 = 25;\quad k_{1,2} = \pm\mathbf{5};$ за таблицею маємо загальний розв'язок ЛОДР $\boldsymbol{y_o = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-5x}}$
$D > 0;\quad k_1 = 0;\ k_2 \neq 0$	$y'' + 8y' = 0;$ Замінимо $y' \to k;\quad y'' \to k^2.$ Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 + 8k = 0.$ Розв'яжемо його $k(k+8) = 0;\quad k_1 = \mathbf{0};\quad k_2 = -\mathbf{8};$ за таблицею маємо загальний розв'язок ЛОДР $\boldsymbol{y_o = C_1 + C_2 e^{-8x}.}$
$D = 0;\quad k_1 = k_2$	$y'' + 10y' + 25y = 0;$ Замінимо $y \to 1;\quad y' \to k;\quad y'' \to k^2.$ Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 + 10k + 25 = 0.$ Розв'яжемо його $D = 10 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = \mathbf{0};\ k_{1,2} = \frac{-10}{2\cdot 1} = -\mathbf{5};$ за таблицею маємо загальний розв'язок ЛОДР $\boldsymbol{y_o = (C_1 + C_2 x)e^{-5x}.}$
$D < 0;\quad k_{1,2} = \pm\beta i$	$y'' + 9y = 0;$ Замінимо $y \to 1;\quad y'' \to k^2.$ Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 + 9 = 0.$ Розв'яжемо його $k^2 = -9;\quad k_{1,2} = \pm\boldsymbol{3i;}$ за таблицею маємо загальний розв'язок ЛОДР $\boldsymbol{y_o = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.}$
$D < 0;\quad k_1 \neq 0;\ k_2 \neq 0$	$y'' + 6y' + 13y = 0;$ Замінимо $y \to 1;\quad y' \to k;\quad y'' \to k^2.$ Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 + 6k + 13 = 0.$ Розв'яжемо його $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -16 < 0;$ $k_{1,2} = \frac{-6 \pm 4i}{2\cdot 1} = \boldsymbol{-3 \pm 2i}$ за таблицею маємо загальний розв'язок ЛОДР $\boldsymbol{y_o = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).}$

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (ЛНДР)

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x)$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді суми загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_{\text{о}} + \boldsymbol{y}_{\text{н}}.$$

Частинний розв'язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами

Вид правої частини $f(x)$	Перевірка відповідності коренів характеристичного рівняння кореням правої частини	Вид частинного розв'язку неоднорідного рівняння $y_{\text{н}}$
$Ae^{\alpha x}$	$k_1 \neq \alpha;\ \ k_2 \neq \alpha$	$\tilde{A}e^{\alpha x}$
	$k_1 = \alpha;\ \ k_2 \neq \alpha$	$\tilde{A}e^{\alpha x} \cdot x$
	$k_1 = k_2 = \alpha$	$\tilde{A}e^{\alpha x} \cdot x^2$
$P_n(x)$	$k_1 \neq 0;\ \ k_2 \neq 0$	$\tilde{P}_n(x)$
	$k_1 = 0;\ \ k_2 \neq 0$	$\tilde{P}_n(x) \cdot x$
$P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$	$k_1 \neq \alpha;\ \ k_2 \neq \alpha$	$\tilde{P}_n(x) \cdot e^{\alpha x}$
	$k_1 = \alpha;\ \ k_2 \neq \alpha$	$\tilde{P}_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot x$
	$k_1 = k_2 = \alpha$	$\tilde{P}_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot x^2$
$A\cos\beta x + B\sin\beta x$	$k_{1,2} \neq \pm\beta i$	$\tilde{A}\cos\beta x + \tilde{B}\sin\beta x$
	$k_{1,2} = \pm\beta i$	$\left(\tilde{A}\cos\beta x + \tilde{B}\sin\beta x\right)x$
$e^{\alpha x}[A\cos\beta x + {}$ $+B\sin\beta x]$	$k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}\left[\tilde{A}\cos\beta x + \tilde{B}\sin\beta x\right]$
	$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}\left[\tilde{A}\cos\beta x + \tilde{B}\sin\beta x\right]x$
$e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + {}$ $+Q_m(x)\sin\beta x]$	$k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + {}$ $+\tilde{Q}_k(x)\sin\beta x]$
	$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + {}$ $+\tilde{Q}_k(x)\sin\beta x]x$

$f(x) = Ae^{\alpha x}$ $k_1 \neq \alpha;\ \ k_2 \neq \alpha$	$y'' - 5y' = 7e^{3x}$. Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 - 5k = 0;\quad k(k-5) = 0;\quad \boldsymbol{k_1 = 0; k_2 = 5}$; отже загальний розв'язок однорідного рівняння $\boldsymbol{y_{\text{о}} = C_1 + C_2 e^{5x}}$. В правій частині $\alpha = 3$, тобто $k_1 \neq \alpha;\ \ k_2 \neq \alpha$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_{\text{н}} = Ae^{3x}$; знайдемо коефіцієнт за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього продиференцюємо $y_{\text{н}}$ $y'_{\text{н}} = 3Ae^{3x};\quad y''_{\text{н}} = 9Ae^{3x}$ та підставимо у рівняння: $9Ae^{3x} - 5 \cdot 3Ae^{3x} = 7e^{3x};\quad -6A = 7;\quad \boldsymbol{A = -\frac{7}{6}}$. Частинний розв'язок має вигляд $\boldsymbol{y_{\text{н}} = -\frac{7}{6}e^{3x}}$. Остаточно маємо $\boldsymbol{y = C_1 + C_2 e^{5x} - \frac{7}{6}e^{3x}}$.
$f(x) = Ae^{\alpha x}$ $k_1 = \alpha;\ \ k_2 \neq \alpha$	$y'' - 4y = 6e^{-2x}$. Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 - 4 = 0;\quad k^2 = 4;\quad k_{1,2} = \pm\boldsymbol{2}$, отже загальний розв'язок однорідного рівняння $\boldsymbol{y_{\text{о}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}}$. В правій частині $\alpha = -2$, $k_1 = \alpha;\ \ k_2 \neq \alpha$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_{\text{н}} = Ae^{-2x} \cdot x$; знайдемо коефіцієнт за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього продиференцюємо $y_{\text{н}}$ $y'_{\text{н}} = -2Ae^{-2x} \cdot x + Ae^{-2x} = Ae^{-2x}(1-2x)$; $y''_{\text{н}} = -2Ae^{-2x}(1-2x) - 2Ae^{-2x} = Ae^{-2x}(4x-4)$ та підставимо у рівняння: $Ae^{-2x}(4x - 4 - 4x) = 6e^{-2x};\ \ -4A = 6;\ \ A = -\frac{3}{2}$. Частинний розв'язок має вигляд $\boldsymbol{y_{\text{н}} = -\frac{3}{2}e^{-2x} \cdot x}$. Остаточно маємо $\boldsymbol{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{3}{2}e^{-2x} \cdot x}$.

$f(x) = Ae^{\alpha x}$ $k_1 = k_2 = \alpha$	$y'' - 12y' + 36y = 4e^{6x}$. Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 - 12k + 36 = 0$; $D = 0$; $k_{1,2} = \mathbf{6}$, отже загальний розв'язок однорідного рівняння $\boldsymbol{y_о = (C_1 + C_2 x)e^{6x}}$. В правій частині $\alpha = 6$, $k_1 = k_2 = \alpha$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_н = Ae^{6x} \cdot x^2$; знайдемо коефіцієнт за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього продиференцюємо $y_н$ $y_н' = 6Ae^{6x} \cdot x^2 + Ae^{6x} \cdot 2x = Ae^{6x}(6x^2 + 2x)$; $y_н'' = 6Ae^{6x}(6x^2 + 2x) + Ae^{6x}(12x + 2) =$ $= Ae^{6x}(36x^2 + 24x + 2)$ та підставимо у рівняння: $Ae^{6x}(36x^2 + 24x + 2 - 72x^2 - 24x + 36x^2) = 4e^{6x}$; $2A = 4$; $\boldsymbol{A = 2}$. Частинний розв'язок має вигляд $\boldsymbol{y_н = 2e^{6x} \cdot x^2}$. Остаточно маємо $\boldsymbol{y = (C_1 + C_2 x)e^{6x} + 2e^{6x} \cdot x^2}$.
$f(x) = P_n(x)$ $k_1 \neq 0$; $k_2 \neq 0$	$y'' - 16y = 32x^2 + 16x - 18$ Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 - 16 = 0$; $k^2 = 16$; $k_{1,2} = \pm\mathbf{4}$, отже загальний розв'язок однорідного рівняння $\boldsymbol{y_о = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x}}$. В правій частині многочлен другої степені, $k_1 \neq 0$; $k_2 \neq 0$, тому частинний розв'язок: $y_н = Ax^2 + Bx + C$; знайдемо коефіцієнти за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього продиференцюємо $y_н$ $y_н' = 2Ax + B$; $y_н'' = 2A$ та підставимо у рівняння: $2A - 16(Ax^2 + Bx + C) = 32x^2 + 16x - 18$; $\begin{array}{c\|ll} x^2 & -16A = 32 & A = -2 \\ x^1 & -16B = 16 & B = -1 \\ x^0 & 2A - 16C = -18 & C = 1 \end{array}$ Частинний розв'язок $\boldsymbol{y_н = -2x^2 - x + 1}$. Остаточно маємо $\boldsymbol{y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x} - 2x^2 - x + 1}$.

$f(x) = P_n(x)$ $k_1 = 0;\ \ k_2 \neq 0$	$y'' + 3y' = 12x + 1.$ Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 + 3k = 0;\quad k(k+3) = 0;\quad \boldsymbol{k_1 = 0; k_2 = -3}$ отже загальний розв'язок однорідного рівняння $\boldsymbol{y_{\text{о}} = C_1 + C_2 e^{-3x}.}$ В правій частині многочлен першої степені, $k_1 = 0;\ \ k_2 \neq 0$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_{\text{н}} = (Ax + B) \cdot x = Ax^2 + Bx,$ знайдемо коефіцієнти за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього продиференцюємо $y_{\text{н}}$ $y_{\text{н}}' = 2Ax + B;\quad y_{\text{н}}'' = 2A$ та підставимо у рівняння. $2A + 3(2Ax + B) = 12x + 1;$ $\begin{array}{l\|ll} x^1 & 6A = 12 & A = 2 \\ x^0 & 2A + 3B = 1 & B = -1 \end{array}$ Частинний розв'язок має вигляд$\boldsymbol{y_{\text{н}} = 2x^2 - x.}$ Остаточно маємо $\boldsymbol{y = C_1 + C_2 e^{-3x} + 2x^2 - x.}$
$f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$ $k_1 \neq \alpha;\ \ k_2 \neq \alpha$	$y'' - 2y' + 10y = e^{-x}(18x - 15).$ Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичне рівняння: $k^2 - 2k + 10 = 0;$ $D = 4 - 40 = -36;\quad k_{1,2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = \boldsymbol{1 \pm 3i;}$ отже загальний розв'язок однорідного рівняння $\boldsymbol{y_{\text{о}} = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).}$ В правій частині $\alpha = -1$, тобто $k_1 \neq \alpha;\ \ k_2 \neq \alpha$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_{\text{н}} = e^{-x}(Ax + B),$ знайдемо коефіцієнти за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього продиференцюємо $y_{\text{н}}$ $y_{\text{н}}' = -e^{-x}(Ax + B) + Ae^{-x} = e^{-x}(-Ax + B + A);$ $y_{\text{н}}'' = -e^{-x}(-Ax + B + A) - Ae^{-x} = e^{-x}(Ax - B - 2A);$ та підставимо у рівняння: $e^{-x}(Ax - B - 2A) - 2e^{-x}(-Ax + B + A) +$ $+10e^{-x}(Ax + B) = e^{-x}(x + 5);$ $e^{-x}(9Ax - 4A + 7B) = e^{-x}(18x - 15);$ $\begin{array}{l\|ll} x^1 & 9A = 18 & A = 2 \\ x^0 & -4A + 7B = -15 & B = -1 \end{array}$ Частинний розв'язок: $\boldsymbol{y_{\text{н}} = e^{-x}(2x - 1).}$ Остаточно маємо $\boldsymbol{y = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^{-x}(2x - 1).}$

$f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$ $k_1 = \alpha;\ \ k_2 \neq \alpha$	$y'' - 4y' + 3y = e^{3x}(4x - 1)$. Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 - 4k + 3 = 0$; $D = 16 - 12 = 4$; $k_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \left[\begin{matrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{3}\end{matrix}\right.$ отже загальний розв'язок однорідного рівняння $\boldsymbol{y_\text{о} = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}}$**.** В правій частині $\alpha = 3$, тобто $k_1 = \alpha;\ \ k_2 \neq \alpha$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_\text{н} = e^{3x}(Ax + B) \cdot x = e^{3x}(Ax^2 + Bx)$, знайдемо коефіцієнти за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього продиференцюємо $y_\text{н}$ $y'_\text{н} = 3e^{3x}(Ax^2 + Bx) + e^{3x}(2Ax + B) =$ $= e^{3x}(3Ax^2 + 3Bx + 2Ax + B)$; $y''_\text{н} = 3e^{3x}(3Ax^2 + 3Bx + 2Ax + B) +$ $+e^{3x}(6Ax + 3B + 2A) =$ $= e^{3x}(9Ax^2 + 9Bx + 12Ax + 6B + 2A)$ та підставимо у рівняння. $e^{3x}(9Ax^2 + 9Bx + 12Ax + 6B + 2A) -$ $-4e^{3x}(3Ax^2 + 3Bx + 2Ax + B) +$ $+3e^{3x}(Ax^2 + Bx) = e^{3x}(4x - 1)$; прирівняємо вирази при експоненті $9Ax^2 + 9Bx + 12Ax + 6B + 2A - 12Ax^2 -$ $-12Bx - 8Ax - 4B + 3Ax^2 + 3Bx = 4x - 1$; спростимо отриманий вираз $4Ax + 2A + 2B = 4x - 1$; та дорівняємо коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо систему $\begin{array}{c\|l} x^1 & 4A = 4 \\ x^0 & 2A + 2B = -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} A = 1 \\ B = -\frac{3}{2} \end{array}$ Частинний розв'язок має вигляд $\boldsymbol{y_\text{н} = e^{3x}\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right)}$**.** Остаточно маємо $y = \boldsymbol{C_1 e^{x} + C_2 e^{3x} + e^{3x}\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right)}$**.**

<table>
<tr>
<td>

$f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$
$k_1 = k_2 = \alpha$

</td>
<td>

$y'' + 2y' + y = e^{-x} \cdot (36x^2 - 12x + 8)$.
Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичне рівняння має вигляд:
$k^2 + 2k + 1 = 0$;
$D = 4 - 4 = 0; \quad k_{1,2} = -\mathbf{1}$.
отже загальний розв'язок однорідного рівняння
$\boldsymbol{y_о = (C_1 + C_2x)e^{-x}.}$

В правій частині $\alpha = -1$, тобто $k_1 = k_2 = \alpha$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді
$y_н = e^{-x}(Ax^2 + Bx + C) \cdot x^2 =$
$= e^{-x}(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2)$,
знайдемо коефіцієнти за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього продиференцюємо $y_н$
$y_н' = -e^{-x}(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2) +$
$+e^{-x}(4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx) =$
$= e^{-x}(-Ax^4 - Bx^3 - Cx^2 + 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx)$
$y_н'' = -e^{-x}(-Ax^4 - Bx^3 - Cx^2 + 4Ax^3 + 3Bx^2 +$
$+2Cx) + e^{-x}(-4Ax^3 - 3Bx^2 - 2Cx + 12Ax^2 +$
$+6Bx + 2C) = e^{-x}(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 - 8Ax^3 -$
$-6Bx^2 - 4Cx + 12Ax^2 + 6Bx + 2C)$
та підставимо у рівняння.
$e^{-x}(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 - 8Ax^3 - 6Bx^2 - 4Cx +$
$+12Ax^2 + 6Bx + 2C) + 2e^{-x}(-Ax^4 - Bx^3 -$
$-Cx^2 + 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx) +$
$+e^{-x}(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2) = 36e^{-x} \cdot (36x^2 -$
$12x + 8)$.
прирівняємо вирази при експонентіта спростимо отриманий вираз
$12Ax^2 + 6Bx + 2C = 36x^2 - 12x + 8$;
дорівняємо коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо систему
$\begin{array}{c|ll} x^2 & 12A = 36 & A = 3 \\ x^1 & 6B = -12 & B = -2 \\ x^0 & 2C = 8 & C = 4 \end{array}$
Частинний розв'язок має вигляд
$\boldsymbol{y_н = e^{-x}\left(3x^4 - 2x^3 + 4x^2\right)}$.

Остаточно маємо
$\boldsymbol{y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + \left(3x^4 - 2x^3 + 4x^2\right)e^{-x}.}$

</td>
</tr>
</table>

$f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$ $k_{1,2} \neq \pm\beta i$	$y'' + 2y' + 5y = 3\sin 2x.$ Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 + 2k + 5 = 0,$ $D = 4 - 20 = -16;\quad k_{1,2} = \frac{-2\pm 4i}{2} = \mathbf{-1 \pm 2}\boldsymbol{i},$ отже загальний розв'язок однорідного рівняння $\boldsymbol{y}_\text{о} = \boldsymbol{e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)}.$ В правій частині $\beta = 2$, тобто $k_{1,2} \neq \pm\beta i$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_\text{н} = A\cos 2x + B\sin 2x,$ знайдемо коефіцієнти за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього продиференцюємо $y_\text{н}$ $y'_\text{н} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x;$ $y''_\text{н} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$ та підставимо у рівняння. $-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 2(-2A\sin 2x +$ $+2B\cos 2x) + 5(A\cos 2x + B\sin 2x) = 3\sin 2x$ або $A\cos 2x + B\sin 2x - 4A\sin 2x + 4B\cos 2x =$ $= 3\sin 2x.$ Дорівняємо коефіцієнти при $\cos 2x$ та $\sin 2x$: $\begin{array}{l\|l} \cos 2x & A + 4B = 0 \\ \sin 2x & -4A + B = 3 \end{array}$ Розв'яжемо отриману систему за правилами Крамера: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 16 = 17;$ $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 12 = -12;$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3;$ $A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\mathbf{\frac{12}{17}};\quad B = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \mathbf{\frac{3}{17}}.$ Частинний розв'язок має вигляд $\boldsymbol{y}_\text{н} = \boldsymbol{-\frac{12}{17}\cos 2x + \frac{3}{17}\sin 2x.}$ Остаточно маємо $\boldsymbol{y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) -}$ $\boldsymbol{-\frac{12}{17}\cos 2x + \frac{3}{17}\sin 2x}$

$f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$ $k_{1,2} = \pm\beta i$	$y'' + 25y = 4\cos 5x - 3\sin 5x.$ Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 + 25 = 0;\quad k^2 = -25;\quad k_{1,2} = \pm\boldsymbol{5i},$ отже загальний розв'язок однорідного рівняння $\boldsymbol{y_о = C_1\cos 5x + C_2\sin 5x.}$ В правій частині $\beta = 5$, тобто $k_{1,2} = \pm\beta i$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_н = (A\cos 5x + B\sin 5x)\cdot x;$ знайдемо коефіцієнти за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього продиференцюємо $y_н$: $y_н' = (-5A\sin 5x + 5B\cos 5x)\cdot x + A\cos 5x +$ $+B\sin 5x;$ $y_н'' = (-25A\cos 5x - 25B\sin 5x)x - 5A\sin 5x +$ $+5B\cos 5x - 5A\sin 5x + 5B\cos 5x;$ та підставимо у рівняння. $(-25A\cos 5x - 25B\sin 5x)x - 10A\sin 5x +$ $+10B\cos 5x + 25(A\cos 5x + B\sin 5x)\cdot x =$ $= 4\cos 5x - 3\sin 5x.$ Спростимо отриманий вираз та дорівняємо коефіцієнти при $\cos 5x$ та $\sin 5x$: $\begin{array}{l\|l} \cos 5x & 10B = 4 \\ \sin 5x & -10A = -3 \end{array}\qquad \boldsymbol{B = \frac{2}{5}}\quad \boldsymbol{A = -\frac{3}{10}}$ Частинний розв'язок має вигляд $\boldsymbol{y_н = \left(-\frac{3}{10}\cos 5x + \frac{2}{5}\sin 5x\right)\cdot x.}$ Остаточно маємо $\boldsymbol{y = C_1\cos 5x + C_2\sin 5x +}$ $\boldsymbol{+\left(-\frac{3}{10}\cos 5x + \frac{2}{5}\sin 5x\right)\cdot x.}$

$f(x) = e^{\alpha x}[A\cos\beta x +$ $+B\sin\beta x]$ $k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$	$y'' + 10y' + 21y = 5e^{-2x}\sin x$. Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 + 10k + 21 = 0$; $D = 100 - 84 = 16; \quad k_{1,2} = \frac{-10\pm4}{2} = \left[\begin{matrix}\mathbf{-3}\\ \mathbf{-7}\end{matrix}\right.$; отже загальний розв'язок однорідного рівняння $\boldsymbol{y_о = C_1e^{-3x} + C_2e^{-7x}}$**.** В правій частині $\alpha = -2;\ \beta = 1$, тобто $k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_н = e^{-2x}(A\cos x + B\sin x)$, знайдемо коефіцієнти за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього продиференцюємо $y_н$ $y_н' = -2e^{-2x}(A\cos x + B\sin x) +$ $+e^{-2x}(-A\sin x + B\cos x) =$ $= e^{-2x}(-2A\cos x - 2B\sin x - A\sin x + B\cos x)$; $y_н'' = -2e^{-2x}(-2A\cos x - 2B\sin x - A\sin x +$ $+B\cos x) + e^{-2x}(2A\sin x - 2B\cos x - A\cos x -$ $-B\sin x) =$ $= e^{-2x}(3A\cos x + 3B\sin x + 4A\sin x - 4B\cos x)$; та підставимо у рівняння. $e^{-2x}(3A\cos x + 3B\sin x + 4A\sin x - 4B\cos x) +$ $10e^{-2x}(-2A\cos x - 2B\sin x - A\sin x + B\cos x)$ $+21e^{-2x}(A\cos x + B\sin x) = 5e^{-2x}\sin x$. Спростимо отриманий вираз $e^{-2x}(4A\cos x + 4B\sin x - 6A\sin x + 6B\cos x) =$ $= 5e^{-2x}\sin x$ та дорівняємо коефіцієнти при $e^{-2x}\cos x$ та $e^{-2x}\sin x$: $\begin{matrix} e^{-2x}\cos x \\ e^{-2x}\sin x \end{matrix}\left\vert\begin{matrix} 4A + 6B = 0 \\ -6A + 4B = 5 \end{matrix}\right.$. Розв'яжемо отриману систему за правилами Крамера: $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 36 = 52$; $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 30 = -30$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 0 = 20$; $A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{30}{52} = -\boldsymbol{\frac{15}{26}}; \quad B = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{20}{52} = \boldsymbol{\frac{5}{13}}$**.** Частинний розв'язок має вигляд $\boldsymbol{y_н = e^{-2x}\left(-\frac{15}{26}\cos x + \frac{5}{13}\sin x\right)}$**.** Остаточно маємо $\boldsymbol{y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-7x} +}$ $\boldsymbol{+e^{-2x}\left(-\frac{15}{26}\cos x + \frac{5}{13}\sin x\right)}$**.**

$f(x) = e^{\alpha x}[A\cos\beta x +$ $+B\sin\beta x]$ $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y'' - 4y' + 29y = e^{2x}(4\cos 5x - \sin 5x)$. Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 - 4k + 29 = 0$; $D = 16 - 116 = -100$; $k_{1,2} = \frac{4\pm 10i}{2} = \mathbf{2 \pm 5}\boldsymbol{i}$. отже загальний розв'язок однорідного рівняння $\boldsymbol{y}_{\text{о}} = \boldsymbol{e^{2x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x)}$. В правій частині$\alpha = 2$; $\beta = 5$, тобто $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_{\text{н}} = e^{2x}(A\cos 5x + B\sin 5x)\cdot x$, знайдемо коефіцієнт за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього продиференцюємо $y_{\text{н}}$ $y'_{\text{н}} = 2e^{2x}(A\cos 5x + B\sin 5x)\cdot x +$ $+e^{2x}(-5A\sin 5x + 5B\cos 5x)\cdot x +$ $+e^{2x}(A\cos 5x + B\sin 5x) =$ $= e^{2x}(2A\cos 5x + 2B\sin 5x - 5A\sin 5x +$ $+5B\cos 5x)\cdot x + e^{2x}(A\cos 5x + B\sin 5x)$; $y''_{\text{н}} = 2e^{2x}(2A\cos 5x + 2B\sin 5x -$ $-5A\sin 5x + 5B\cos 5x)x + e^{2x}(-10A\sin 5x +$ $+10B\cos 5x - 25A\cos 5x - 25B\sin 5x)\cdot x +$ $+e^{2x}(2A\cos 5x + 2B\sin 5x - 5A\sin 5x +$ $+5B\cos 5x) + 2e^{2x}(A\cos 5x + B\sin 5x) +$ $+e^{2x}(-5A\sin 5x + 5B\cos 5x) =$ $= e^{2x}(-21A\cos 5x - 21B\sin 5x - 20A\sin 5x +$ $+20B\cos 5x)\cdot x + e^{2x}(4A\cos 5x + 4B\sin 5x -$ $-10A\sin 5x + 10B\cos 5x)$ та підставимо у рівняння: $e^{2x}(-21A\cos 5x - 21B\sin 5x - 20A\sin 5x +$ $+20B\cos 5x)\cdot x + e^{2x}(4A\cos 5x + 4B\sin 5x -$ $-10A\sin 5x + 10B\cos 5x) - 4e^{2x}(2A\cos 5x +$ $+2B\sin 5x - 5A\sin 5x + 5B\cos 5x)\cdot x -$ $-4e^{2x}(A\cos 5x + B\sin 5x) + 29e^{2x} \times$ $\times (A\cos 5x + B\sin 5x)\cdot x$ $= e^{2x}(4\cos 5x - \sin 5x)$ Спростимо отриманий вираз $e^{2x}(-10A\sin 5x + 10B\cos 5x) =$ $= e^{2x}(4\cos 5x - \sin 5x)$

	та прирівняємо коефіцієнти при $e^{2x}\cos 5x$ та $e^{2x}\sin 5x$: $\begin{array}{r\|l} e^{2x}\cos 5x & 10B = 4;\quad B = 0{,}4 \\ e^{2x}\sin 5x & -10A = -1; A = 0{,}1 \end{array}$ Частинний розв'язок має вигляд $\boldsymbol{y_{\text{н}} = e^{2x}(0,1\cos 5x + 0,4\sin 5x)\cdot x.}$ Остаточно маємо $\boldsymbol{y = e^{2x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x) +}$ $\boldsymbol{+e^{2x}(0,1\cos 5x + 0,4\sin 5x)\cdot x.}$

Тема «СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ»

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь **методом виключення змінної**	Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь $\begin{cases} x' = x - 3y\,(1) \\ y' = 3x + y\,(2) \end{cases}$. Продиференцюємо (1): $x'' = x' - 3y'$, підставимо у отримане y' з (2): $x'' = x' - 9x - 3y$. Виразимо з (1) $y = -\frac{1}{3}(x' - x)$ та підставимо в останнє $x'' = x' - 9x - 3\cdot\left(-\frac{1}{3}(x' - x)\right)$ або $x'' - 2x' + 10x = 0$. Характеристичне рівняння, йому відповідне: $k^2 - 2k + 10 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 1 \pm 3i$; маємо загальний розв'язок для шуканої функції x: $x = e^t(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t)$. Щоб знайти функцію y, продиференцюємо x: $x' = e^t(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t - 3C_1\sin 3t + 3C_2\cos 3t)$; $y = -\dfrac{1}{3}(x' - x) = -\dfrac{1}{3}(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t -$ $-3C_1\sin 3t + 3C_2\cos 3t - C_1\cos 3t - C_2\sin 3t)$ $y = e^t(C_1\sin 3t - C_2\cos 3t)$. Остаточно маємо загальний розв'язок системи: $\boldsymbol{\begin{cases} x = e^t(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t) \\ y = e^t(C_1\sin 3t - C_2\cos 3t) \end{cases}}$

Розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь **за допомогою характеристичного рівняння** Розв'язки системи шукаємо у вигляді $x = r_1 e^{kt}, \quad y = r_2 e^{kt}.$ Характеристичне рівняння системи має вигляд $\begin{vmatrix} a_1 - k & b_1 \\ a_2 & b_2 - k \end{vmatrix} = 0$	Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}.$ Характеристичне рівняння системи має вигляд $\begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ 3 & 4-k \end{vmatrix} = (2-k)(4-k) - 1 \cdot 3 =$ $= k^2 - 6k + 5 = 0$ звідси $k_1 = 1;\ k_2 = 5.$ При $k_1 = 1$ перший розв'язок системи $x = e^t; \quad \Rightarrow y = x' - 2x = e^t - 2e^t = -e^t$ при $k_2 = 5$ другий розв'язок системи $x = e^{5t}; \Rightarrow y = y = x' - 2x = 5e^{5t} - 2e^{5t} = 3e^{5t}.$ Звідси загальний розв'язок системи має вигляд $\boldsymbol{x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}};$ $\boldsymbol{y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}}.$

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – СПб. : Лань, 2003. – 736 с.
2. Валєєв К.Г. Вища математика: У 2 ч. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова – Київ : КНЕУ, 2001.
3. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. У 2 кн. / За ред. Г. Л. Кулініча. – Київ : Либідь, 2003.
4. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. – М. : Наука, 1985.
5. Станішевський С. О. Вища математика : навч. посібник / С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2005. – 270 с.
6. Станішевський С. О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв’язання (Модуль 1) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 88 с.
7. Станішевський С. О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв’язання (Модуль 2) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 125 с.
8. Станішевський С.О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв’язання (Модуль 3) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 110 с.
9. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. – М. : Наука, 1975. – 272 с.
10. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М. : Наука, 1985. – 383 с.
11. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М. : Наука, 1968. – 336 с.

Навчальне видання

КОВАЛЕНКО Людмила Борисівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Модуль 2

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Відповідальний за випуск *А. В. Якунін*

Редактор *О. А. Норик*

Комп'ютерне верстання *Л. Б. Коваленко*

Підп. до друку 06.02.2017 Формат 60*84/16
Друк на різографі Ум. друк. арк. 10,2
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017 р.